# L'expression (a + b) et ses puissances

On considère l'expression littérale (a + b), expression appelée aussi binôme.

1. Déterminer $(a + b)^0$.

2. Déterminer $(a + b)^1$.

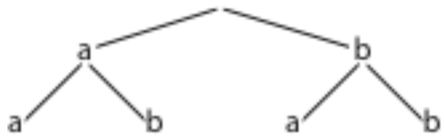
3. Développer et simplifier $(a + b)^2$.

   Indiquer les valeurs des coefficients des monômes apparaissant dans l'expression obtenue (autrement dit, combien de fois observe-t-on les produits $a^2$ ? ab ? $b^2$ ?)

Pour développer $(a + b)^2$, il est possible de procéder pas à pas comme ci-dessous :

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a(a + b) + b(a + b) = ...$$

A l'aide de l'arbre représenté, identifier un moyen simple de déterminer les coefficients précédents.

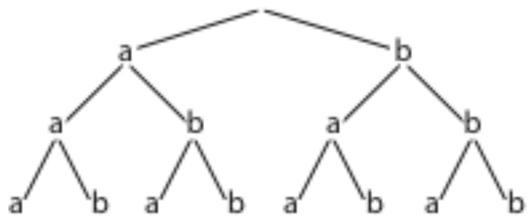



4. Développer et simplifier $(a + b)^3$. Indiquer les valeurs des coefficients de chacun des monômes apparaissant dans l'expression obtenue.

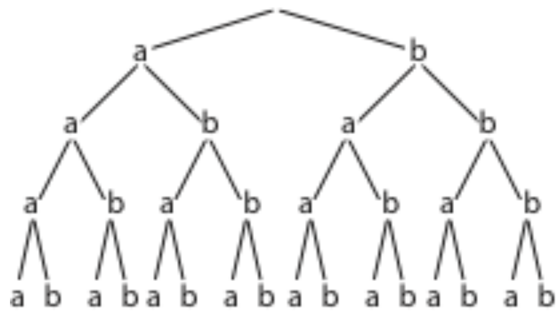
Pour développer $(a + b)^3$, il est possible de procéder pas à pas comme ci-dessous :

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b) = aa(a + b) \; + ab(a + b) \; + ba(a + b) \; + bb(a + b)$$

A l'aide de l'arbre ci-dessous, déterminer les coefficients précédents.



5. Développer sans aucun calcul l'expression $(a + b)^4$ en utilisant l'arbre ci-dessous :




6. Déterminer l'expression développée de $(a + b)^5$ en construisant l'arbre qui convient.

# coefficients binomiaux

## coefficients binomiaux

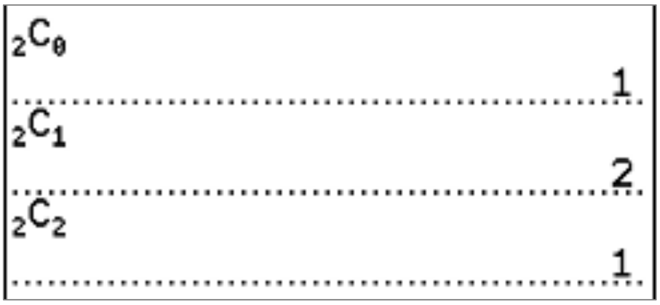
Les coefficients obtenus dans chacune des expressions sont appelés coefficients binomiaux. Le (k+1)-ième coefficient (k allant de 0 à n) de l'expression développée du binôme $(a + b)^n$ est noté $\binom{n}{k}$ et peut être directement obtenu à l'aide de la calculatrice en tapant sur la touche $\boxed{\text{math}}$ qui ouvre le menu ci-dessous.


En sélectionnant PROB, puis 3:Combinaison, on obtient la possibilité de calculer un coefficient binomial quelconque.

**Exemple 1**

L'expression $(a + b)^2$ s'écrit sous la forme $1 \times a^2 + 2 \times ab + 1 \times b^2$.

En tapant sur la calculatrice les séquences ci-dessous :




On observe que le premier coefficient $\binom{2}{0}$ est 1.

On observe que le deuxième coefficient $\binom{2}{1}$ est 2.

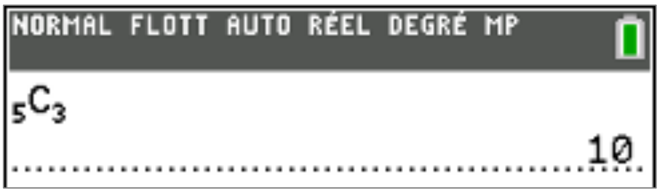
On observe que le troisième coefficient $\binom{2}{2}$ est 1.

**Exemple 2**

L'expression $(a + b)^5$ s'écrit sous la forme $...a^5 + ...a^4b + ...a^3b^2 + ...a^2b^3 + + ...ab^4 + ...b^5$.

Le coefficient $\binom{5}{3}$ est le quatrième coefficient de $(a + b)^5$, parmi les 6 coefficients existants.

En tapant sur la calculatrice la séquence ci-dessous :




On observe que le quatrième coefficient, parmi les 6 possibles, est 10.

**Application**

Déterminer tous les coefficients de l'expression développée de $(a + b)^5$, c.-à-d. tous les coefficients manquants de $...a^5 + ...a^4b + ...a^3b^2 + ...a^2b^3 + + ...ab^4 + ...b^5$.

**Exemple 3**

1. Déterminer tous les coefficients de l'expression développée de $(a + b)^4$ et écrire l'expression développée.
2. Déterminer tous les coefficients de l'expression développée de $(a + b)^6$ et écrire l'expression développée.
3. Déterminer tous les coefficients de l'expression développée de $(a + b)^8$ et écrire l'expression développée.
4. Que remarque-t-on pour les coefficients $\binom{n}{0}$ et $\binom{n}{n}$ ?
5. Que remarque-t-on pour les coefficients $\binom{n}{k}$ et $\binom{n}{n-k}$ ?

# TRIANGLE DE PASCAL

La détermination des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ peut se faire directement à partir du triangle de Pascal.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 1 | | | | | | | |
| 1 | 3 | 3 | 1 | | | | | | |
| 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | | | |
| 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | | | |
| 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | | | |
| 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 | | |
| 1 | 8 | 28 | 56 | 70 | 56 | 28 | 8 | 1 | |
| 1 | 9 | 36 | 84 | 126 | 126 | 84 | 36 | 16 | 1 |
| ... | | | | | | | | | |

$\binom{2}{2}$ $\binom{3}{0}$ $\binom{5}{3}$ $\binom{9}{2}$

Que remarque-t-on pour les coefficients $\binom{n}{0}$ et $\binom{n}{n}$ ?

Que remarque-t-on pour les coefficients $\binom{n}{k}$ et $\binom{n}{n-k}$ ?

1. Développer $(0{,}1 + 0{,}9)^2$.

2. Développer $(0{,}3 + 0{,}7)^2$.

3. Développer $(0{,}5 + 0{,}5)^2$.

4. Développer $(0{,}15 + 0{,}85)^3$.

5. Développer $(0{,}8 + 0{,}2)^4$.

6. Développer $(p + (1-p))^2$.

7. Développer $(p + (1-p))^3$.

8. Développer $(p + (1-p))^n$.