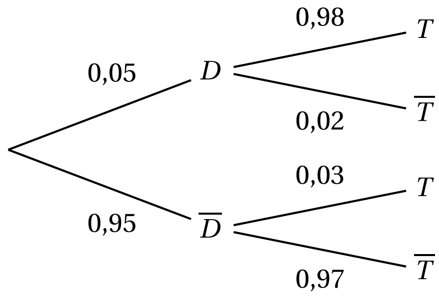
PARTIE I

1. On traduit la situation à l'aide d'un arbre pondéré :



2. **a.** On a : $P(D \cap T) = P(D) \times P_D(T) = 0,05 \times 0,98 = 0,049$.

b. On a de même : $P\left(\overline{D} \cap T\right) = P\left(\overline{D}\right) \times P_{\overline{D}}(T) = 0,95 \times 0,3 = 0{,}028\,5$.

D'après la loi des probabilités totales :

$P(T) = P(D \cap T) + P\left(\overline{D} \cap T\right) = 0,049 + 0{,}028\,5 = 0{,}077\,5$.

3. La valeur prédictive positive du test est égale à :

$P_T(D) = \dfrac{P(T \cap D)}{P(T)} = \dfrac{P(D \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,049}{0{,}077\,5} \approx 0{,}632\,2$, soit 0,632 au millième près.

Comme $0,632 < 0,95$ on peut en déduire que le test n'est pas efficace.

PARTIE II

1. Le choix de l'échantillon étant assimilé à un tirage avec remise et avec une probabilité constante de choisir un produit défectueux égale à $0,05$, on peut donc dire que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,05$.

2. On a : $p(X = 0) = 0,05^0 \times 0,95^{20}$.

Donc la probabilité cherchée est $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0,95^{20} \approx 0,642$, soit 0,64 au centième près.

3. On a : $E = n \times p = 20 \times 0,05 = 1$.

Cela signifie que sur un grand nombre de tirages d'échantillons on trouvera 1 pièce défectueuse sur 20 pièces tirées.