Dossier : Propriété des coefficients binomiaux

1. Le triangle de Pascal

$$
\begin{array}{lcccccccl}
\binom{0}{0} & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & \\
\binom{1}{0} & 1 & 1 & & & & & & \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} & 1 & 2 & 1 & & & & & \\
 & 1 & 3 & 3 & 1 & & & & \\
 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & & \\
 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & \\
\binom{6}{0} & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & \binom{6}{6}
\end{array}
$$

Les coefficients qui apparaissent dans le triangle de Pascal sont appelés coefficients binomiaux. Nous les retrouvons dans le développement d'un binôme élevé à une puissance donnée.

Ces coefficients sont égaux au nombre de combinaisons de k éléments distincts choisis parmi n éléments.

Nous avons la relation fondamentale : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

Propriété 1

Pour tout n ≥ 1, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

Propriété 2

Pour tout n ≥ , nous avons : $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

Propriété 3

Pour tout n ≥ 1, 0 ≤ k ≤ n, nous avons la relation : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Propriété 4

Pour tout n ≥ 1, 0 ≤ k ≤ n, nous avons : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Application

Pour déterminer à l'aide de la calculatrice le coefficient $\binom{7}{3}$, on tape 7 nCr 3 ou ${}_7C_3$.

2. Formule du binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Propriété 5

Pour tout n ≥ 1 : $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$