Loi binomiale - espérance

1. Espérance E(X) d'une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n ; p)$.

1.1. Cas où n = 2

On considère la variable X qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(2 ; p)$.

Loi de probabilité de la variable aléatoire discrète X

k	0	1	2
P(X = k)	$1 \times (1-p)^2$	$2 \times (1-p) \times p$	$1 \times p^2$

Déterminons l'espérance de la variable aléatoire X.

$$E(X) = \sum_{k=0}^{2} P(X = k) \times k = P(X = 0) \times 0 + P(X = 1) \times 1 + P(X = 2) \times 2 = P(X = 1) + 2P(X = 2)$$

$$E(X) = 2(1 - p)p + 2p^2 = 2p - 2p^2 + 2p^2 = 2p$$

1.2. Cas où n = 3

On considère la variable X qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(3 ; p)$.

Loi de probabilité de la variable aléatoire discrète X

k	0	1	2	3
P(X = k)	$1 \times (1-p)^3$	$3 \times (1-p)^2 \times p$	$3 \times (1-p) \times p^2$	$1 \times p^3$

Déterminons l'espérance de la variable aléatoire X.

$$E(X) = \sum_{k=0}^{3} P(X = k) \times k = P(X = 0) \times 0 + P(X = 1) \times 1 + P(X = 2) \times 2 + +P(X = 3) \times 3$$

$$E(X) = P(X = 1) + 2P(X = 2) + 3P(X = 3) = 3(1 - p)^2p + 6(1 - p)p^2 + 3p^3$$

$$E(X) = 3(1 - 2p + p^2)p + 6p^2 - 6p^3 + 3p^3 = 3p - 6p^2 + 3p^3 + 6p^2 - 6p^3 + 3p^3$$

$$E(X) = 3p$$

Exercice

On considère la variable X qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(4\,;\,p)$. Démontrer que $E(X) = 4p$.

Que peut-on conjecturer lorsque la variable X qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;\,p)$.

1.3. <u>Cas où n est un entier naturel quelconque</u>

On considère la variable X qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;\,p)$.

Loi de probabilité de la variable aléatoire discrète X

k	0	1	... k ...	n - 1	n
P(X = k)	$\binom{n}{0}\times (1-p)^n \times p^0$	$\binom{n}{1}\times (1-p)^{n-1} \times p^1$	$\binom{n}{k} \times (1-p)^{n-k} \times p^k$	$\binom{n}{n-1} \times (1-p) \times p^{n-1}$	$\binom{n}{n} \times p^n$

Rappel de cours : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$ (formule du binôme de Newton)

D'après le résultat de cours ci-dessus (abordé en seconde, formulé en première et consolidé en terminale), en posant a = p et b = 1 - p, nous obtenons :

$$(p+1-p)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

Par conséquent : $1^n = 1 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

L'égalité $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = 1$ traduit simplement le fait que la somme des probabilités du tableau ci-dessus est égale à 1. La compréhension de cette relation est essentielle.

Déterminons l'espérance de la variable aléatoire X.

Par définition, on a : $E(X) = P(X=0)\times 0 + P(X=1)\times 1 + \cdots + P(X=n-1)\times(n-1) + +P(X=n)\times n$

C'est-à-dire : $E(X) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)\times k$ avec : $P(X = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

Or : $\sum_{k=0}^{n} P(X=k)\times k = \sum_{k=1}^{n} P(X=k)\times k$

D'où :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\times k = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

Examinons le terme $k\binom{n}{k}$.

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{(n-k)!\,k!} = k\frac{(n-1)!\,n}{(n-k)!\,(k-1)!\,k} = n\frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!} = n\frac{(n-1)!}{(n-1-(k-1))!\,(k-1)!} = n\binom{n-1}{k-1}$$

Par conséquent :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}$$

Examinons la somme $\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}$.

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}=\binom{n-1}{0}p^1(1-p)^{n-1}+\binom{n-1}{1}p^2(1-p)^{n-2}+\cdots+\binom{n-1}{n-1}p^n(1-p)^0$$
$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}=p\left[\binom{n-1}{0}p^0(1-p)^{n-1}+\binom{n-1}{1}p^1(1-p)^{n-2}+\cdots+\binom{n-1}{n-1}p^{n-1}(1-p)^0\right]$$

Or, cette somme est égale à 1 puisqu'elle représente la somme des probabilités d'une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres p et n - 1.

Par conséquent :

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}=p$$

D'où :

$$E(X)=n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}=np.$$

COURS

L'espérance E(X) d'une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale (n ; p) est donné par la relation :

$$E(X) = n \times p$$