Loi binomiale

variance et écart-type

2. Variance V(X) d'une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}$(n ; p).

2.1. Cas où n = 2

On considère la variable X qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}$(2 ; p). On rappelle que, dans ce cas, E(X) = 2p.

Loi de probabilité de la variable aléatoire discrète X

k	0	1	2
P(X = k)	$1 \times (1-p)^2$	$2 \times (1-p) \times p$	$1 \times p^2$
k - E(X)	- 2p	1 - 2p	2 - 2p

Déterminons la variance V(X) de la variable aléatoire X.

Par définition :

$$V(X) = \sum_{k=0}^{2} [k - E(X)]^2 \times P(X = k)$$

D'où :

$V(X) = [-2p]^2 \times (1-p)^2 + [1-2p]^2 \times 2p(1-p) + [2-2p]^2 \times p^2$

$V(X) = 4p^2 \times (1-p)^2 + [1-2p]^2 \times 2p(1-p) + 4[1-p]^2 \times p^2$

$V(X) = 2p(1-p)[2p(1-p) + (1-2p)^2 + 2p(1-p)] = 2p(1-p)[4p(1-p) + 1 - 4p + p^2]$

$V(X) = 2p(1-p)[1] = 2p(1-p)$

Conclusion :

$$V(X) = 2p(1-p)$$

2.2. Cas où n = 3

On considère la variable X qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}$(3 ; p). On rappelle que, dans ce cas, E(X) = 3p.

Loi de probabilité de la variable aléatoire discrète X

k	0	1	2	3
P(X = k)	$1 \times (1-p)^3$	$3 \times (1-p)^2 \times p$	$3 \times (1-p) \times p^2$	$1 \times p^3$
k - E(X)	-3p	1-3p	2-3p	3-3p = 3(1-p)

Déterminons la variance V(X) de la variable aléatoire X.

Par définition :

$$V(X) = \sum_{k=0}^{3} [k - E(X)]^2 \times P(X = k)$$

D'où :

$V(X) = [-3p]^2 \times (1-p)^3 + [1-3p]^2 \times 3(1-p)^2 p + [2-3p]^2 \times 3(1-p)p^2 + [3(1-p)]^2 \times p^3$

$V(X) = 3p(1-p)[3p(1-p)^2 + (1-3p)^2(1-p) + [2-3p]^2 \times p + 3(1-p)p^2]$

$V(X) = 3p(1-p)[3p(1-2p+p^2) + (1-6p+9p^2)(1-p) + (4-12p+9p^2) \times p + 3(1-p)p^2]$

$V(X) = 3p(1-p)[3p - 6p^2 + 3p^3 + 1 - 6p + 9p^2 - p + 6p^2 - 9p^3 + 4p - 12p^2 + 9p^3 + 3p^2 - 3p^3]$

$V(X) = 3p(1-p)[1] = 3p(1-p)$

Conclusion :

$$V(X) = 3p(1-p)$$

2.3. Cas où n est un entier naturel quelconque

On considère la variable X qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$. On a par conséquent : E(X) = np.

Loi de probabilité de la variable aléatoire discrète X

k	0	1	... k ...	n - 1	n
P(X = k)	$\binom{n}{0} \times (1-p)^n \times p^0$	$\binom{n}{1} \times (1-p)^{n-1} \times p^1$	$\binom{n}{k} \times (1-p)^{n-k} \times p^k$	$\binom{n}{n-1} \times (1-p) \times p^{n-1}$	$\binom{n}{n} \times p^n$

On rappelle que : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1$

Déterminons la variance V(X) de la variable aléatoire X.

Par définition, on a :

$$V(X) = \sum_{k=0}^{n} [k - E(X)]^2 \times P(X = k)$$

Donc :

$$V(X) = \sum_{k=0}^{n} [k - np]^2 \times P(X = k)$$

D'où : $V(X) = \sum_{k=0}^{n} [k^2 - 2knp + n^2p^2] \times P(X = k)$

Ainsi : $V(X) = \sum_{k=0}^{n} [k^2] \times P(X = k) + \sum_{k=0}^{n} [-2knp] \times P(X = k) + \sum_{k=0}^{n} [n^2p^2] \times P(X = k)$

D'où : $V(X) = \sum_{k=0}^{n} [k^2] \times P(X = k) - 2np \underbrace{\sum_{k=0}^{n} k \times P(X = k)}_{E(X)=np} + n^2p^2 \underbrace{\sum_{k=0}^{n} P(X = k)}_{1}$

Ainsi : $V(X) = \sum_{k=0}^{n} [k^2] \times P(X = k) - 2n^2p^2 + n^2p^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 \times P(X = k) - n^2p^2$

Examinons à présent la somme $\sum_{k=0}^{n} k^2 \times P(X = k)$ et remarquons tout d'abord que : $k^2 = k(k-1) + k$

Nous avons donc :

$\sum_{k=0}^{n} k^2 \times P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} (k(k-1) + k) \times P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \times P(X = k) + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} k \times P(X = k)}_{E(X)=np}$

D'où : $\sum_{k=0}^{n} k^2 \times P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \times P(X = k) + np = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \times P(X = k) + np$

Par conséquent :

$$V(X) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \times P(X=k) + np - n^2p^2$$

Examinons la somme $\sum_{k=2}^{n} k(k-1) \times P(X=k)$. On a :

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1) \times P(X=k) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \times \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

Examinons le terme $k(k-1) \times \binom{n}{k}$.

$$k(k-1)\binom{n}{k} = k(k-1)\frac{n!}{(n-k)!\,k!} = k(k-1)\frac{(n-2)!\,(n-1)n}{(n-k)!\,(k-2)!\,(k-1)k} = n(n-1)\frac{(n-2)!}{(n-k)!\,(k-2)!}$$

$$k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$$

Par conséquent :

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1) \times P(X=k) = \sum_{k=2}^{n} n(n-1) \times \binom{n-2}{k-2} \times p^k \times (1-p)^{n-k} = n(n-1)\sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

D'où :

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1) \times P(X=k) = n(n-1) \times \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

Or :

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} \times p^k \times (1-p)^{n-k} = \binom{n-2}{0} \times p^2 \times (1-p)^{n-2} + \binom{n-2}{1} \times p^3 \times (1-p)^{n-3} + \cdots + \binom{n-2}{n-2} \times p^n$$

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} \times p^k \times (1-p)^{n-k} = p^2 \times \left[\underbrace{\binom{n-2}{0}(1-p)^{n-2} + \binom{n-2}{1} \times p \times (1-p)^{n-3} + \cdots + \binom{n-2}{n-2} \times p^{n-2}}_{1}\right]$$

Donc : $\sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} \times p^k \times (1-p)^{n-k} = p^2$

Ainsi :

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1) \times P(X=k) = n(n-1)p^2$$

En conséquence :

$$V(X) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \times P(X=k) + np - n^2p^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2$$

Donc :

$$V(X) = -np^2 + np = np(1-p)$$

En résultat :

COURS

La variance V(X) d'une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale (n ; p) est donné par la relation :

$$V(X) = n \times p \times (1 - p)$$

L'écart-type σ(X) d'une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale (n ; p) est donné par la relation :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$