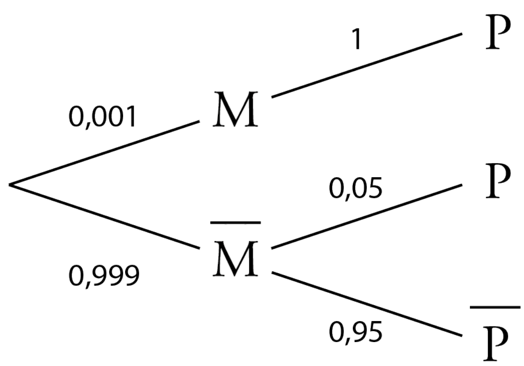
solution du problème

Une maladie, qui touche une personne sur mille peut être détectée par un test. Celui-ci a un taux d'erreurs positives de 5%, c'est-à-dire qu'il y a 5% de faux positifs. Un individu est soumis au test. Le résultat est positif. Quelle est la probabilité pour qu'il soit effectivement atteint ?

Considérons une population d'individus satisfaisant à l'hypothèse formulée (1 personne malade parmi 1000 personnes).
On choisit au hasard un individu dans la population considérée et on teste cet individu à l'aide du test mentionné (5% de faux positifs).
Soient M l'événement : "La personne choisie au hasard est malade", et
P l'événement : "La personne choisie est positive au test".

1. Arbre de probabilité complété



2. Déterminons $P(M \cap P)$.

$$P(M \cap P) = 0{,}001 \times 1 = 0{,}001$$

3. Déterminons $P(P)$.

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(P) = P(M \cap P) + P(\overline{M} \cap P) = 0{,}001 + 0{,}999 \times 0{,}05 = 0{,}05095$$

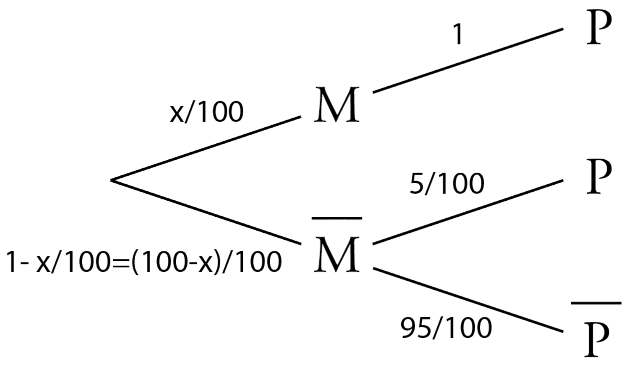
4. Déterminons $P_P(M)$.

$$P_P(M) = \frac{P(M \cap P)}{P(P)} = \frac{0{,}001}{0{,}05095} \approx 0{,}0196$$

5. Conclusion, la probabilité qu'un individu soit malade sachant qu'il est testé positif est de l'ordre de 1,96%.

6. La situation se modélise aisément sur une feuille de papier, tel que vu en classe.

Résolvons le problème dans le cas où la maladie touche x personnes sur cent, x étant un réel compris entre 0 et 100.



Déterminons $P(M \cap P)$.

$P(M \cap P) = \frac{x}{100} \times 1 = \frac{x}{100}$

Déterminons $P(P)$.

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$P(P) = P(M \cap P) + P(\overline{M} \cap P) = \frac{x}{100} + \frac{100-x}{100} \times \frac{5}{100} = \frac{100x+5(100-x)}{10000}$

D'où : $P(P) = \frac{95x+500}{10000} = \frac{0,95x+5}{100} = \frac{0,19x+1}{20}$

Déterminons $P_P(M)$.

$P_P(M) = \frac{P(M \cap P)}{P(P)} = \frac{\frac{x}{100}}{\frac{0,95x+5}{100}} = \frac{x}{0,95x+5} = \frac{20x}{19x+100}$

7. Résolvons le problème dans le cas où la maladie touche une personne sur cent.

Dans ce cas, x = 1 et $P_P(M) = \frac{20(1)}{19(1)+100} = \frac{20}{119} \approx 0,168$

La probabilité qu'un individu soit malade sachant qu'il est testé positif est ici de l'ordre de 17%.

8. Résolvons le problème dans le cas où la maladie touche une personne sur dix.

Dans ce cas, x = 10 et $P_P(M) = \frac{20(10)}{19(10)+100} = \frac{200}{290} \approx 0,6897$

La probabilité qu'un individu soit malade sachant qu'il est testé positif est ici de l'ordre de 69%.

Référence : Daniel Kahneman - Système 1/Système 2 (Fast thinking/Slow thinking).