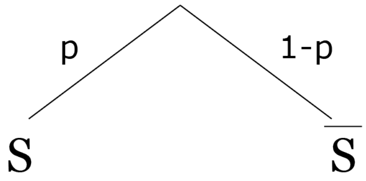
La loi binomiale

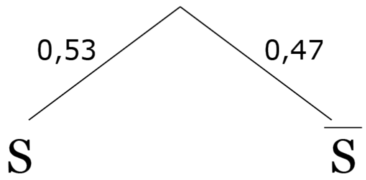
1. Épreuve de Bernoulli

1.1. <u>Définition</u>

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire à deux issues S et $\overline{S}$ (S pour "Succès"), la probabilité d'un succès étant notée p ($0 \leq p \leq 1$).



1.2. <u>Exemple</u> : Epreuve de Bernoulli de paramètre p = 0,53



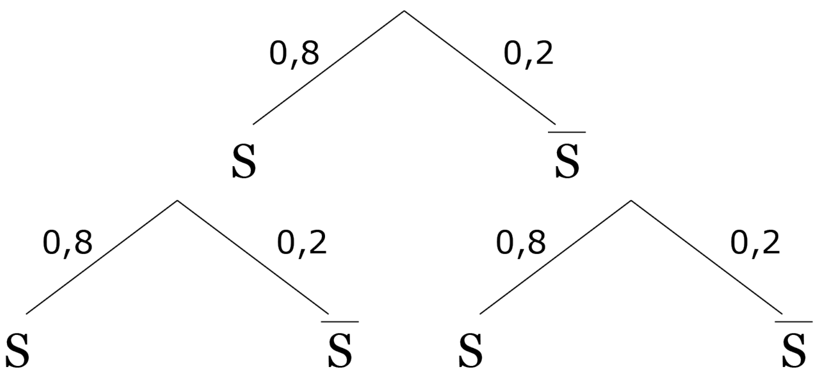
2. Schéma de Bernoulli

2.1. <u>Définition</u>

Un schéma de Bernoulli est une répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Un schéma de Bernoulli de paramètres n et p est la répétition de n épreuves de Bernoulli, identiques et indépendantes, de paramètre p.

2.2. <u>Exemple</u> : Schéma de Bernoulli de paramètre n = 2 et p = 0,8

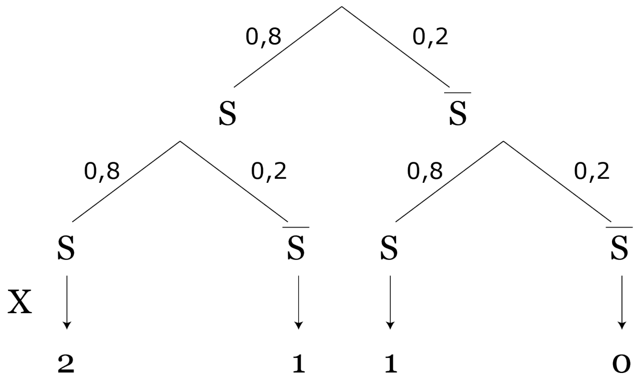


3. Loi binomiale

On considère un schéma de Bernoulli caractérisé par la répétition de n épreuves de Bernoulli, identiques et indépendantes, de paramètre p, p étant la probabilité d'un succès.
On considère X la variable aléatoire qui associe à cette répétition de n épreuves le nombre de succès obtenus.
La loi de probabilité que suit la variable aléatoire X est appelée <u>loi binomiale de paramètres n et p</u>.
On dit que X suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$.

3.1. Loi binomiale $\mathcal{B}(2\ ;\ 0{,}8)$.

On considère un schéma de Bernoulli caractérisé par la répétition de 2 épreuves de Bernoulli, identiques et indépendantes, de paramètre 0,8 et X la variable aléatoire qui associe à cette répétition de 2 épreuves le nombre de succès.



La variable aléatoire X est une fonction qui associe à un résultat de l'expérience schématisée le nombre de succès obtenus. X peut prendre 3 valeurs distinctes : 0, 1 et 2.

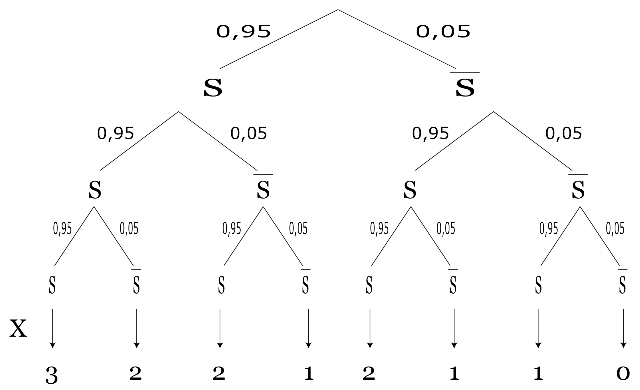
Loi de probabilité de la variable aléatoire discrète X

k	0	1	2
P(X = k)	$1 \times (0{,}2)^2$	$2 \times 0{,}2 \times 0{,}8$	$1 \times (0{,}8)^2$
$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$	$\binom{2}{0} = 1$	$\binom{2}{1} = 2$	$\binom{2}{2} = 1$

On dit que la variable X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(2\ ;\ 0{,}8)$.

3.2. Loi binomiale $\mathcal{B}(3\ ;\ 0{,}95)$.

On considère un schéma de Bernoulli caractérisé par la répétition de 3 épreuves de Bernoulli, identiques et indépendantes, de paramètre 0,95 et X la variable aléatoire qui associe à cette répétition de 3 épreuves le nombre de succès.



La variable aléatoire X peut prendre 4 valeurs distinctes : 0, 1, 2 et 3.
On note, d'après l'arbre, que : $P(X = 2) = 3 \times 0{,}95^2 \times 0{,}05^1$ (2 succès et 1 échec), le nombre 3 étant le coefficient binomial $\binom{3}{2} = 3$, nombre de fois qu'un chemin comporte 2 succès (S).

Loi de probabilité de la variable aléatoire discrète X

k	0	1	2	3
P(X = k)	$1 \times (0{,}05)^3$	$3 \times (0{,}05)^2 \times 0{,}95$	$3 \times 0{,}05 \times (0{,}95)^2$	$1 \times (0{,}95)^3$
$\binom{n}{k}$	$\binom{3}{0} = 1$	$\binom{3}{1} = 3$	$\binom{3}{2} = 3$	$\binom{3}{3} = 1$

On dit que la variable X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(3 ; 0{,}95)$.

3.3. Loi binomiale $\mathcal{B}(n ; p)$.

On considère un schéma de Bernoulli caractérisé par la répétition de n épreuves de Bernoulli, identiques et indépendantes, de paramètre n et X la variable aléatoire qui associe à cette répétition de n épreuves le nombre de succès.

La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n ; p)$. La probabilité que la variable aléatoire X prenne pour valeur la valeur k ($0 \leq k \leq n$) est donnée par :

$$\boxed{P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

Nombre de chemins réalisant k succès parmi n possibles

3.4. Utilisation de la calculatrice

P(X = k) = binomFdp(n, p, k) ou binompdF(n, p, k) selon modèle Texas Instruments.

P(0 ≤ X ≤ k) = binomFRep(n, p, k) ou binomcdf(n, p, k)

4. Espérance, variance et écart-type de la v. a. X.

L'espérance de la variable aléatoire X se note E(X) et est donnée par : $E(X) = n \times p$

La variance est : $V(X) = n \times p \times (1 - p)$

L'écart-type est : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$