

RÉCURRENCE - EXPERT

Afin de vous aider à projeter vers l'Enseignement Supérieur, vous trouverez ci-après quatre exercices stimulants.

Les polynômes de Bernoulli

73 • Polynômes de Bernoulli

On considère les polynômes $B_0, B_1, \dots, B_n, \dots$ définis de la façon suivante : quel que soit le réel x , $B_0(x) = 1$ et $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$ et pour $n \geq 2$: $B'_n(x) = nB_{n-1}(x)$, $B_n(1) = B_n(0)$.

1. Calculez B_2, B_3 et B_4 .

Montrer, par récurrence, que pour tout $n \geq 2$, B_n est un polynôme de degré n .

2. Calculer, pour x réel, les expressions suivantes :

$B_0(x+1) - B_0(x)$; $B_1(x+1) - B_1(x)$; $B_2(x+1) - B_2(x)$;
 $B_3(x+1) - B_3(x)$; $B_4(x+1) - B_4(x)$.

Quelle conjecture peut-on faire ?

3. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n :

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1} \text{ quel que soit le réel } x.$$

4. Calculer, à l'aide de B_n , l'entier naturel $\sum_{k=0}^{k=p} k^{n-1}$.

5. Applications

a. Donner une expression de $\sum_{k=0}^{k=p} k^3$.

b. Après avoir calculé B_5 , donner une expression de

$$\sum_{k=0}^{k=p} k^4.$$