RÉCURRENCE - Hérédité

L'étape de vérification de l'hérédité est une étape plus délicate que l'étape d'initialisation dans un raisonnement par récurrence.

Démontrer l'hérédité de chacune des propriétés ci-dessous :

1. On considère la propriété P(n) : $1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   L'hérédité de cette propriété sera vérifiée en cours de mathématiques.

2. On considère la propriété P(n) : $2^n \geq 4n$ pour $n \geq 4$.

   <u>Hérédité</u>
   Supposons P(k) vraie. Autrement dit : $2^k \geq 4k$ (Hyp.) pour $k \geq 4$.
   La propriété P(k + 1) est-elle vraie ? A-t-on : $\underbrace{2^{k+1}}_{A} \geq \underbrace{4(k+1)}_{B}$?

   On a : $A = 2^{k+1} = 2 \times 2^k \geq 2 \times 4k = 4 \times 2k$
   De plus : $B = 4(k+1)$
   Or, pour $k \geq 1$, on a : $k + k \geq k + 1$, donc : $2k \geq k + 1$. D'où : $4 \times 2k \geq 4(k+1)$.
   Comme $k \geq 4$, on a : $A \geq B$ et la propriété P(k + 1) est vraie.
   L'hérédité est démontrée ou vérifiée ou la propriété P est héréditaire.

   Il existe de multiples manières de s'exprimer, l'important étant que la formulation utilisée ait un sens.

3. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et, pour tout $n > 0$, par : $u_{n+1} = \sqrt{4 + u_n{}^2}$. (Hyp. 1)

   On considère la propriété P(n) : $u_n = 2\sqrt{n}$.

   <u>Hérédité</u>
   Supposons P(k) vraie. Autrement dit : $u_k = 2\sqrt{k}$ (Hyp. 2) pour $k > 0$.
   La propriété P(k + 1) est-elle vraie ? A-t-on : $\underbrace{u_{k+1}}_{A} = \underbrace{2\sqrt{k+1}}_{B}$?
   On a : $A = u_{k+1} \overset{Hyp.1}{\triangleq} \sqrt{4 + u_k{}^2} = \overset{Hyp.2}{\triangleq} \sqrt{4 + \left(2\sqrt{k}\right)^2} = \sqrt{4 + 4k} = \sqrt{4(1+k)}$
   Donc : $A = \sqrt{4(1+k)} = \sqrt{4}\sqrt{(1+k)} = 2\sqrt{(1+k)}$
   Or : $B = 2\sqrt{(1+k)}$
   Conclusion : A = B, la propriété est héréditaire.

4. Soit la suite (q_n) définie par $q_1 = 1/3$ et, pour tout $n \geq 1$, par : $q_{n+1} = \frac{n+1}{3n} q_n$.
   On considère la propriété P(n) : $q_n = \frac{n}{3^n}$.

   L'hérédité de cette propriété sera vérifiée en cours de mathématiques.