Fractions continues et récurrence

74 Soit n un entier ($n \geqslant 1$).

On se propose de résoudre sur $]0\,;+\infty[$ l'équation :

$$(E_n) \qquad \left.x = 1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{\ddots \; 1+\cfrac{2}{x}}}}\right\}, \; n \text{ traits de fractions}$$

1. Écrire les équations E_1, E_2 et E_3 et les résoudre. Quelles remarques peut-on faire ?

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$ et soit (x_n) la suite définie par $\begin{cases} x_0 > 0 \\ x_n = f(x_{n-1}) \end{cases}$

a. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions α et β telles que $\alpha < 0 < \beta$.

b. On pose $u_n = \dfrac{x_n - \beta}{x_n - \alpha}$ ($x_0 \neq \alpha$).

Montrer que u_n est défini pour tout entier n et que la suite (u_n) est une suite géométrique.

c. En déduire que $u_n = \left(\dfrac{-1}{2}\right)^n \dfrac{x_0 - \beta}{x_0 - \alpha}$, pour $n \geqslant 0$.

3. Résoudre l'équation E_n.