Théorème de récurrence

Théorème

Soit $\mathcal{P}$ une propriété, appelée hypothèse de récurrence, définie pour les entiers naturels.

Si elle vérifie

(1) $\mathcal{P}(0)$ est vraie, (Initialisation)

(2) pour tout entier naturel n, la véracité de $\mathcal{P}(n)$ implique celle de $\mathcal{P}(n + 1)$, (Hérédité)

alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Exercice 1

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 2/5$ et, pour tout $n \geq 0$, par : $u_{n+1} = u_n + \frac{3}{5}$.

Démontrer que, pour tout entier $n \geq 0$, $u_n = \frac{3n+2}{5}$

Exercice 2

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 40$ et, pour tout $n \geq 0$, par : $u_{n+1} = \frac{4}{5} u_n$.

Démontrer que, pour tout entier $n \geq 0$, $u_n = 32 \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$

Exercice 3

On définit la suite (u_n) par $u_1 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$, par : $u_{n+1} = -2u_n + 9$.

Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = (-2)^n + 3$.

Exercice 4

On considère la somme S_n définie par $S_n = 0 + 1 + 2 + 3 + ... + n$.

Démontrer que $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ pour tout entier naturel n.

Exercice 5

On considère la somme S_n définie par $S_n = q^0 + q^1 + q^2 + q^3 + q^4 + ... + q^n$.

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

exercice 6

On considère la somme T_n définie par $T_n = 0 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$.

Démontrer que $T_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour tout entier naturel n.

exercice 7

Démontrer que, pour tout entier $n \geq 4$, on a : $2^n \geq 4n$.

exercice 8

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et, pour tout $n > 0$, par : $u_{n+1} = \sqrt{4 + u_n{}^2}$.

Conjecturer une expression de u_n en fonction de n, puis démontrer cette conjecture.

exercice 9

Soit la suite (q_n) définie par $q_1 = 1/3$ et, pour tout $n \geq 1$, par : $q_{n+1} = \frac{n+1}{3n} q_n$.

Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $q_n = \frac{n}{3^n}$

exercice 10 **(BAC 2017)**

Soit (u_n) la suite géométrique de raison 0,85 et de premier terme $u_0 = 1$. On définit à partir de la suite (u_n) une nouvelle suite (v_n) telle que : $v_{n+1} = 0{,}65v_n + 0{,}05u_n$ avec $v_0 = 0$.

Afficher dans un tableau les dix premiers termes de chaque suite.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier n, $v_n = \frac{1}{4}(0{,}85^n - 0{,}65^n)$.