

exercice 54

54 À la fin du mois de janvier 2019, 280 voitures ont été louées dans une société de location. On modélise le nombre de voitures louées chaque mois par une suite (u_n) , où pour tout entier naturel n , u_n représente le nombre de voitures louées le n -ième mois après le mois de janvier 2019. On admet que cette modélisation conduit à l'égalité $u_{n+1} = 0,9u_n + 42$.

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n = -140 \times 0,9^n + 420$.

b) Déterminer le mois à partir duquel le nombre de voitures louées dépassera 400.

a) On considère la propriété $P(n) : \underbrace{u_n}_A = \underbrace{-140 \times 0,9^n + 420}_B$.

On sait, d'après l'énoncé, que : $u_{n+1} = 0,9u_n + 42$ avec $u_0 = 280$.

Démontrons que cette propriété est vraie pour tout entier naturel.

Initialisation

$P(0)$ est-elle vraie ? A-t-on $A = B$ pour $n = 0$?

Pour $n = 0$, on a :
$$\begin{cases} A = u_0 = 280. \\ B = -140 \times 0,9^0 + 420 = 280 \end{cases}$$

Donc : $A = B$.

Conclusion : $P(0)$ est vraie !

Hérédité

Supposons $P(k)$ vraie, c'est-à-dire $u_k = -140 \times 0,9^k + 420$.

A-t-on $P(k+1)$ vraie ? Autrement dit, a-t-on $\underbrace{u_{k+1}}_C = \underbrace{-140 \times 0,9^{k+1} + 420}_D$?

On a : $C = u_{k+1} = 0,9u_k + 42 = 0,9(-140 \times 0,9^k + 420) + 42$

D'où : $C = -140 \times 0,9^{k+1} + 378 + 42 = -140 \times 0,9^{k+1} + 420 = D$

Conclusion : $P(k+1)$ est vraie ! L'hérédité est vérifiée.

Conclusion

La propriété étant vraie pour $n = 0$ et étant héréditaire, d'après le théorème de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel.

Remarques

Par modélisation à l'aide la calculatrice, on constate que la suite est **croissante**, c'est-à-dire que les valeurs du terme u_n augmentent lorsque n augmente.

n	u_n
0	280
1	294
2	306,6
3	317,94
4	328,15
5	337,3314
100	420
1000	420
10 000	420

De plus, on constate que les termes de la suite se rapprochent de plus en plus de la valeur 420, tout en demeurant inférieure à cette valeur.

On dit que 420 est la **limite** de la suite (u_n) . Ce que l'on note : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 420$.

Comme tous les termes de la suite sont inférieurs à cette limite, on dit que 420 est un **majorant** de la suite (u_n) .

Démontrons que la suite (u_n) est croissante.

Pour démontrer qu'une suite est croissante, il faut démontrer que $u_{n+1} > u_n$ pour tout entier naturel.

Déterminons $u_{n+1} - u_n$ et étudions le signe de l'expression obtenue.

$$u_{n+1} - u_n = -140 \times 0,9^{n+1} + 420 - (-140 \times 0,9^n + 420)$$

Donc :

$$u_{n+1} - u_n = -140 \times 0,9^{n+1} + 140 \times 0,9^n = -140 \times 0,9^n \times 0,9 + 140 \times 0,9^n$$

D'où :

$$u_{n+1} - u_n = 140 \times 0,9^n \times (1 - 0,9) = 14 \times 0,9^n > 0$$

Donc : $u_{n+1} > u_n$

La suite (u_n) est dite strictement croissante.

Démontrons que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 420$.

$$\text{On a : } u_n = -140 \times 0,9^n + 420.$$

Or, quand n tend vers l'infini, $0,9^n$ tend vers 0 (c.f. Étude des suites géométriques). Donc : $-140 \times 0,9^n$ tend vers 0.

$$\text{D'où : } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 420.$$

Les limites de suites feront l'objet d'une étude particulière ; le raisonnement ci-dessus s'appuie sur des notions et des résultats qui seront explicités en cours de mathématiques.

- b) Déterminons le mois à partir duquel le nombre de voitures louées dépassera 400.

Par modélisation à l'aide la calculatrice, on obtient les données (arrondies au centième) suivantes :

n	u_n
18	398,99
19	401,09

D'après ce tableau, le nombre de voitures louées dépassera 400 à partir du dix-neuvième mois après janvier 2019.

En août 2020, nous pouvons penser, attendue la modélisation considérée, que le nombre de voitures louées dépassera 400.

Programmation Python

Vous trouverez ci-dessous un exemple de programme dans lequel est définie une fonction u qui renvoie pour un nombre n passé en argument la valeur du terme u_n de la suite (u_n) et une fonction `rangseuildepasse` qui renvoie le rang de la suite (u_n) à partir duquel tous les termes de la suite dépassent un seuil passé en argument.

```
#!/usr/bin/env python3
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Wed Aug 24 14:35:13 2022

@author: patrickjanc
"""

def u(n):
    return -140*0.9**n+420

def rangseuildepasse(seuil):
    rang = 0
    while u(rang)<seuil:
        rang = rang+1
    return rang
```

Pour déterminer le mois à partir duquel le nombre de voitures louées dépasse 400, il suffit de taper dans l'interpréteur Python, après avoir exécuté le module ci-dessus, l'instruction : `rangseuildepasse(400)`.

```
In [2]: rangseuildepasse(400)
Out[2]: 19
```