Fractions continues

Soit n un nombre entier ($n \geq 1$).

On se propose de résoudre sur]0 ; +∞[l'équation (E_n) :

$$x = 1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{2}{\dots}}}}$$

L'indice n représente le nombre de traits de fractions.

1. L'équation (E_1) est l'équation :

$$x = 1 + \frac{2}{x}$$

Résolvons (E_1).

$$x = 1 + \frac{2}{x} \Leftrightarrow x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

Cette équation est de la forme $x^2 - sx + p = 0$ où s est la somme des racines du trinôme et p le produit avec s = 1 et p = -2.

Les deux racines sont ici triviales. Il s'agit de -1 et 2.

Sur l'intervalle]0 ; +∞[, la solution de l'équation (E_1) est donc le nombre 2.

L'équation (E_2) est l'équation :

$$x = 1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{2}{x}}$$

Résolvons (E_2).

$$x = 1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{2}{x}} \Leftrightarrow x\left(1 + \frac{2}{x}\right) = 1 + \frac{2}{x} + 2 \Leftrightarrow x + 2 = 3 + \frac{2}{x} \Leftrightarrow x = 1 + \frac{2}{x}$$

L'équation (E_2) est équivalente à l'équation (E_1) dont la solution est le nombre 2 sur l'intervalle]0 ; +∞[.

L'équation (E_3) est l'équation :

$$x = 1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{2}{x}}}$$

Résolvons (E_3).

$$x = 1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{x}}} \Leftrightarrow x\left(1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{x}}\right) = 1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{x}} + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\left(1 + \frac{2}{x} + 2\right) = 3\left(1 + \frac{2}{x}\right) + 2 \Leftrightarrow 3x + 2 = 3 + \frac{6}{x} + 2 \Leftrightarrow x = 1 + \frac{2}{x}$$

L'équation (E_3) est équivalente à l'équation (E_1) dont la solution est le nombre 2 sur l'intervalle]0 ; +∞[.

On peut conjecturer que les solutions de l'équation (E_n) sont les mêmes que les solutions de l'équation (E_1), à savoir -1 et 2.

2. On considère la fonction f définie sur l'ensemble des réels strictement positifs par :

$$f(x) = 1 + \frac{2}{x}$$

et on considère la suite (x_n) définie par $\begin{cases} x_0 > 0 \\ x_n = f(x_{n-1}) \end{cases}$

2.a. L'équation $f(x) = x$ équivaut à l'équation (E_1).

Ses solutions sont $\alpha = -1$ et $\beta = 2$.

2.b. On pose $u_n = \frac{x_n - \beta}{x_n - \alpha} = \frac{x_n - 2}{x_n + 1}$ $(x_0 \neq -1)$

Montrons que u_n est défini pour tout entier n et que la suite (u_n) est une suite géométrique.

Démontrons tout d'abord que u_n est défini pour tout entier n.

Pour que ce soit le cas, il faut que x_n soit toujours différent de -1, sinon une division par zéro intervient dans le calcul de u_n.

Une récurrence rapide suffit à démontrer la propriété P(n) : "$x_n \neq -1$"

Cette propriété est vraie pour n = 0 puisque, par hypothèse, $x_0 \neq -1$.

Cette propriété est héréditaire car si $x_k \neq -1$, alors $x_{k+1} = f(x_k) = 1 + \frac{2}{x_k} \neq -1$.

Montrons que la suite (u_n) est une suite géométrique.

$$u_{n+1} = \frac{x_{n+1} - 2}{x_{n+1} + 1} = \frac{f(x_n) - 2}{f(x_n) + 1} = \frac{1 + \frac{2}{x_n} - 2}{1 + \frac{2}{x_n} + 1} = \frac{-1 + \frac{2}{x_n}}{2 + \frac{2}{x_n}} = \frac{\frac{-x_n + 2}{x_n}}{\frac{2x_n + 2}{x_n}} = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{-x_n + 2}{x_n + 1}$$

$$u_{n+1} = \frac{x_{n+1} - 2}{x_{n+1} + 1} = -\left(\frac{1}{2}\right)\frac{x_n - 2}{x_n + 1} = -2u_n$$

Conclusion, la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$.

2.c. Par conséquent, on a : $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{x_0-2}{x_0+1}\right)$ $(x_0 \neq -1)$

3. Comme $u_n = \frac{x_n-2}{x_n+1} = \frac{x_n+1-3}{x_n+1} = 1 - \frac{3}{x_n+1}$.

On obtient : $u_n - 1 = -\frac{3}{x_n+1}$

D'où : $x_n + 1 = -\frac{3}{u_n-1}$

En résultat : $x_n = -\frac{3}{u_n-1} - 1 = -\frac{3+ u_n-1}{u_n-1} = -\frac{u_n+2}{u_n-1}$

D'après la question 2.c., la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$, sa limite est 0 quand n tend vers l'infini.

D'après les propriétés des limites, on a : $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\frac{2}{-1} = 2$.

Or la limite de x_n est solution de l'équation (E_n) quand n tend vers l'infini car $x_n = f(x_{n-1})$ avec $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$.

En résultat, l'équation (E_n) a pour solution le nombre 2 sur l'intervalle]0 ; +∞[lorsque n tend vers l'infini.