correction d'évaluation

exercice 1 (voir exercice similaire traité en classe)

On définit la suite (u_n) par : $u_{n+1} = u_n + \frac{3}{5}$ avec $u_0 = 2/5$.

Démontrer que, pour tout entier naturel, $u_n = \frac{3n+2}{5}$.

exercice 2 (voir exercice similaire traité en classe)

On définit la suite (u_n) par : $u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n$ avec $u_0 = 2$.

Démontrer que, pour tout entier n ≥ 0, $u_n = 2\left(\frac{3}{5}\right)^n$

exercice 3

On définit la suite (u_n) par : $u_{n+1} = 2u_n - 1$ avec $u_0 = 3$. De plus, on considère la fonction f définie sur l'ensemble des réels par f(x) = 2x - 1.

1. La fonction f est une fonction **affine** car elle est définie par une expression de la forme f(x) = ax + b avec a = 2 et b = -1.

2. La fonction affine f est **croissante** car son coefficient a est positif. La droite représentative de la fonction f monte de la gauche vers la droite.

3. Calculons u_1, u_2, u_3 et u_4.

   $u_1 = 2u_0 - 1 = 2(3) - 1 = 6 - 1 = 5$

   $u_2 = 2u_1 - 1 = 2(5) - 1 = 10 - 1 = 9$

   $u_3 = 2u_2 - 1 = 2(9) - 1 = 18 - 1 = 17$

   $u_4 = 2u_3 - 1 = 2(17) - 1 = 34 - 1 = 33$

4. Démontrons par un raisonnement par récurrence la propriété P(n) : "$u_{n+1} > u_n$" pour tout entier naturel n, sachant que : $u_{n+1} = 2u_n - 1$ et $u_0 = 3$.

Initialisation

La propriété P(0) est-elle vraie. A-t-on : $u_1 > u_0$?

On a : $u_1 = 5$ et $u_0 = 3$, donc $u_1 > u_0$ et P(0) est vraie.

Hérédité

Supposons P(k) vraie. Autrement dit : $u_{k+1} > u_k$ (Hyp.)

La propriété P(k + 1) est-elle vraie ? A-t-on : $\underbrace{u_{k+2}}_{C} > \underbrace{u_{k+1}}_{D}$?

Par hypothèse, on a : $u_{k+1} > u_k$

Or f est une fonction affine croissante sur l'ensemble des réels. Elle conserve l'ordre.

Donc : $f(u_{k+1}) > f(u_k)$

D'après la définition de la fonction f, on a : $u_{k+2} = f(u_{k+1})$ et $u_{k+1} = f(u_k)$

D'où : $u_{k+2} > u_{k+1}$

L'hérédité est démontrée.

Conclusion

La propriété étant vraie pour $n = 0$ et l'hérédité étant vérifiée, d'après le théorème de récurrence, on a : $u_{n+1} > u_n$ pour tout entier naturel n

5. D'après le résultat ci-dessus, la suite (u_n) est une suite strictement croissante car $u_{n+1} > u_n$ pour tout entier naturel n.