un peu plus loin... avec la récurrence

Exercice 1

On pose pour tout n ≥ 1, d_n = P(n) - P(n - 1) où P est une fonction polynôme de degré 2.

1. Conjecturons la nature de la suite (d_n) pour P(x) = 3x² - x + 4.

Tableau de valeurs

n	P(n)	d_n = P(n+1) - P(n)
0	P(0) = 3(0)² - 0 + 4 = 4	
1	P(1) = 3(1)² - 1 + 4 = 6	6 - 4 = 2
2	P(2) = 3(2)² - 2 + 4 = 14	14 - 6 = 8
3	P(3) = 3(3)² - 3 + 4 = 28	28 - 14 = 14
4	P(4) = 3(4)² - 4 + 4 = 48	48 - 28 = 20

Nous observons dans le tableau ci-dessus que les termes de suite (d_n) augmentent à chaque fois de 6. Nous pouvons conjecturer que la suite (d_n) est une suite arithmétique de raison 6 et de premier terme d_1 = 2 ; c'est-à-dire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $d_{n+1} = d_n + 6$ avec $d_1 = 2$.

2. Démontrons que : $d_{n+1} = d_n + 6$ avec $d_1 = 2$ pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

Considérons la propriété P(n) : "$\underbrace{d_{n+1} - d_n}_{A} = 6$".

Démontrons directement cette propriété.

$d_{n+1} - d_n = P(n+1) - P(n) - [P(n) - P(n-1] = P(n+1) - 2P(n) + P(n-1)$

$d_{n+1} - d_n = P(n+1) + P(n-1) - 2P(n)$

$d_{n+1} - d_n = 3(n+1)^2 - (n+1) + 4 + 3(n-1)^2 - (n-1) + 4 - 2(3n^2 - n + 4)$

$d_{n+1} - d_n = 3(n^2 + 2n + 1) - 2n + 3(n^2 - 2n + 1) + 8 - 6n^2 + 2n - 8$

$d_{n+1} - d_n = 3(n^2 + 2n + 1) + 3(n^2 - 2n + 1) - 6n^2$

$d_{n+1} - d_n = (3n^2 + 6n + 3) + (3n^2 - 6n + 3) - 6n^2$

$d_{n+1} - d_n = 6$

Conclusion

On a : $d_{n+1} = d_n + 6$ avec $d_1 = 2$.

La suite (d_n) est une suite arithmétique de raison 6 et de premier terme d_1 = 2

Exercice 2

Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n}(2^k + 2k - 5)$ pour tout n entier naturel.

1. $S_0 = \sum_{k=0}^{0}(2^k + 2k - 5) = 2^0 + 2(0) - 5 = -4$

   $S_1 = \sum_{k=0}^{1}(2^k + 2k - 5) = [2^0 + 2(0) - 5] + [2^1 + 2(1) - 5] = -4 + (-1) = -5.$

   $S_2 = \sum_{k=0}^{2}(2^k + 2k - 5) = S_1 + [2^2 + 2(2) - 5] = -5 + (3) = -2.$

   $S_3 = \sum_{k=0}^{3}(2^k + 2k - 5) = S_2 + [2^3 + 2(3) - 5] = -2 + (9) = 7.$

2. Exprimer S_n en fonction de n.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(2^k + 2k - 5) = \sum_{k=0}^{n} 2^k + \sum_{k=0}^{n} 2k + \sum_{k=0}^{n}(-5)$$

où :

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = \frac{1 - 2^{n+1}}{-1} = 2^{n+1} - 1$$

$$\sum_{k=0}^{n} 2k = 2\sum_{k=0}^{n} k = 2(0 + 1 + 2 + \cdots + n) = 2\frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-5) = -5\sum_{k=0}^{n} 1 = -5(\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{(n+1)\ fois}) = -5(n+1)$$

D'où :

$$S_n = 2^{n+1} - 1 + n(n+1) - 5(n+1) = 2^{n+1} + n^2 - 4n - 6$$

<u>Conclusion</u>

$$S_n = 2^{n+1} + n^2 - 4n - 6$$

Exercice 3

La suite u est donnée par son premier terme $u_0 = 3$ et la relation $u_{n+1} = u_n + n + 1$ pour tout $n \geq 0$.

1. On a : $u_1 = u_0 + 0 + 1 = 3 + 1 = 4$

$u_2 = u_1 + 1 + 1 = 4 + 1 + 1 = 6$

$u_3 = u_2 + 2 + 1 = 6 + 2 + 1 = 9$

$u_4 = u_3 + 3 + 1 = 9 + 3 + 1 = 9$

2. Exprimer en fonction du terme précédent u_1, u_2, u_3, u_4 jusque u_n en alignant les termes les uns sous les autres. En déduire u_n en fonction de n.

u_1	=	u_0	+	1
u_2	=	u_1	+	2
u_3	=	u_2	+	3
u_{n-1}	=	u_{n-2}	+	n - 1
u_n	=	u_{n-1}	+	n

D'après le tableau ci-dessus, on a :

$A + u_n = u_0 + A + 1 + 2 + 3 + ... + n$ où : $A = u_1 + u_2 + ... + u_{n-1}$

D'où : $u_n = u_0 + 1 + 2 + 3 + ... + n$

Donc : $u_n = 3 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{6+n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n+6}{2}$