

RÉCURRENCES - HÉRÉDITÉ

L'étape de vérification de l'hérédité est une étape plus délicate que l'étape d'initialisation dans un raisonnement par récurrence.

Démontrer l'hérédité de chacune des propriétés ci-dessous :

1. On considère la propriété $P(n) : 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

L'hérédité de cette propriété a été vérifiée en cours de mathématiques.

2. On considère la propriété $P(n) : 2^n \geq 4n$ pour $n \geq 4$.

Hérédité

Supposons $P(k)$ vraie. Autrement dit : $2^k \geq 4k$ (Hyp.) pour $k \geq 4$.

La propriété $P(k+1)$ est-elle vraie ? A-t-on : $\underbrace{2^{k+1}}_A \geq \underbrace{4(k+1)}_B$?

On a : $A = 2^{k+1} = 2 \times 2^k \geq 2 \times 4k = 4 \times 2k$

De plus : $B = 4(k+1)$

Or, pour $k \geq 1$, on a : $k + k \geq k + 1$, donc : $2k \geq k + 1$. D'où : $4 \times 2k \geq 4(k+1)$.

Comme $k \geq 4$, on a : $A \geq B$ et la propriété $P(k+1)$ est vraie.

L'hérédité est démontrée ou vérifiée ou la propriété P est héréditaire.

Il existe de multiples manières de s'exprimer, l'important étant que la formulation utilisée ait un sens.

3. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et, pour tout $n > 0$, par : $u_{n+1} = \sqrt{4 + u_n^2}$. (Hyp. 1)

On considère la propriété $P(n) : u_n = 2\sqrt{n}$.

Hérédité

Supposons $P(k)$ vraie. Autrement dit : $u_k = 2\sqrt{k}$ (Hyp. 2) pour $k > 0$.

La propriété $P(k+1)$ est-elle vraie ? A-t-on : $\underbrace{u_{k+1}}_A = \underbrace{2\sqrt{k+1}}_B$?

On a : $A = u_{k+1} \stackrel{\text{Hyp.1}}{=} \sqrt{4 + u_k^2} = \stackrel{\text{Hyp.2}}{=} \sqrt{4 + (2\sqrt{k})^2} = \sqrt{4 + 4k} = \sqrt{4(1+k)}$

Donc : $A = \sqrt{4(1+k)} = \sqrt{4}\sqrt{1+k} = 2\sqrt{1+k}$

Or : $B = 2\sqrt{1+k}$

Conclusion : $A = B$, la propriété est héréditaire.

4. Soit la suite (q_n) définie par $q_1 = 1/3$ et, pour tout $n \geq 1$, par : $q_{n+1} = \frac{n+1}{3n} q_n$.

On considère la propriété $P(n) : q_n = \frac{n}{3^n}$.

L'hérédité de cette propriété a été vérifiée en cours de mathématiques.