Polynômes de Bernoulli

On considère les polynômes B_0, B_1, ..., B_n, définis de la façon suivante :

quel que soit le réel x, $B_0(x) = 1$ et $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$ et

pour tout entier naturel $n \geq 2$: $B'_n(x) = nB_{n-1}(x)$ avec $B_n(0) = B_n(1)$.

1. Déterminons le polynôme B_2.

   On a : $B'_2(x) = 2B_1(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) = 2x - 1$.

   D'où : $B_2(x) = x^2 - x + a$ où a est une constante indéterminée.

   Déterminons le polynôme B_3.

   On a : $B'_3(x) = 3B_2(x) = 3(x^2 - x + a) = 3x^2 - 3x + 3a$.

   D'où : $B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3ax + b$ où b est une constante indéterminée.

   Or : $B_3(0) = B_3(1)$.

   Donc : $b = 1^3 - \frac{3}{2}(1)^2 + 3a(1) + b$.

   Ce qui donne : $3a - \frac{1}{2} = 0$, d'où : $a = \frac{1}{6}$.

   En conséquence : $B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$.

   Et : $B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + b$.

   Déterminons le polynôme B_4.

   On a : $B'_4(x) = 4B_3(x) = 4\left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + b\right) = 4x^3 - 6x^2 + 2x + 4b$.

   D'où : $B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 4bx + c$ où c est une constante indéterminée.

   Or : $B_4(0) = B_4(1)$.

   Donc : $c = (1)^4 - 2(1)^3 + (1)^2 + 4b(1) + c$.

   Ce qui donne : $4b = 0$, d'où : $b = 0$.

   En conséquence : $B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$.

   Et : $B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + c$.

Déterminons le polynôme B_5.

On a : $B'_5(x) = 5B_4(x) = 5(x^4 - 2x^3 + x^2 + c) = 5x^4 - 10x^3 + 5x^2 + 5c$.

D'où : $B_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 + 5cx + d$ où d est une constante indéterminée.

Or : $B_5(0) = B_5(1)$.

Donc : $d = (1)^5 - \frac{5}{2}(1)^4 + \frac{5}{3}(1)^3 + 5c(1) + d$

Ce qui donne : $0 = 1 - \frac{5}{2} + \frac{5}{3} + 5c$, d'où : $5c - \frac{1}{6} = 0$ et $c = \frac{1}{30}$.

En conséquence : $B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + \frac{1}{30}$

Et : $B_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{6}x + d$.

● Démontrons par récurrence que le polynôme $B_n(x)$ est un polynôme de degré n pour tout entier n ≥ 2.

Considérons la propriété P(n) : "$B_n(x)$ est un polynôme de degré n"

Démontrons par récurrence cette propriété pour tout entier n ≥ 2.

Initialisation

D'après ce qui précède, on a : $B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$. Donc $B_2(x)$ est un polynôme de degré 2. La propriété est vraie pour n = 2.

Hérédité

Supposons la propriété P(k) vraie. Autrement dit, supposons que $B_k(x)$ soit un polynôme de degré k.

A-t-on P(k+1) vraie ? $B_{k+1}(x)$ est-il un polynôme de degré k+1 ?

$B'_{k+1}(x) = (k+1)B_k(x)$.

Le polynôme $B_{k+1}(x)$ est une primitive du polynôme $B_k(x)$ de degré k.

Donc, le polynôme $B_{k+1}(x)$ est un polynôme de degré k+1. L'hérédité est vérifiée.

Conclusion

D'après le théorème de récurrence, la propriété étant vraie pour n = 2 et étant héréditaire, elle est vraie pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2.

2. Calculons $B_0(x+1)-B_0(x)$.

   $B_0(x+1)-B_0(x)=1-1=0$.

   Calculons $B_1(x+1)-B_1(x)$.

   $B_1(x+1)-B_1(x)=x+1-\frac{1}{2}-\left(x-\frac{1}{2}\right)=1$.

   Calculons $B_2(x+1)-B_2(x)$.

   $B_2(x+1)-B_2(x)=(x+1)^2-(x+1)+\frac{1}{6}-\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)$.

   $B_2(x+1)-B_2(x)=2x$.

   Calculons $B_3(x+1)-B_3(x)$.

   $B_3(x+1)-B_3(x)=(x+1)^3-\frac{3}{2}(x+1)^2+\frac{1}{2}(x+1)-\left(x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right)$.

   $B_3(x+1)-B_3(x)=3x^2$.

   Le calcul de $B_4(x+1)-B_4(x)$ donnerait $4x^3$.

   On peut conjecturer que : $B_n(x+1)-B_n(x)=nx^{n-1}$.

3. Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, on a :

   $$B_n(x+1)-B_n(x)=nx^{n-1} \text{ quel que soit le réel x}$$

   Soit P(n) la propriété : "$\underbrace{B_n(x+1)-B_n(x)}_{A}=\underbrace{nx^{n-1}}_{B}$ quel que soit le réel x"

   Initialisation

   P(1) est-elle vraie ? A-t-on A = B quand n = 1 ?

   Pour n = 1, on a : $A=B_1(x+1)-B_1(x)=1$

   $B=1\times x^0=1$

   D'où : A = B et P(1) vraie !

   Hérédité

   Supposons P(k) vraie. Autrement dit, $B_k(x+1)-B_k(x)=kx^{k-1}$

   A-t-on P(k+1) vraie ? A-t-on $\underbrace{B_{k+1}(x+1)-B_{k+1}(x)}_{C}=\underbrace{(k+1)x^k}_{D}$

Calculons la dérivée de $B_{k+1}(x+1) - B_{k+1}(x)$.

$\left(B_{k+1}(x+1) - B_{k+1}(x)\right)' = B'_{k+1}(x+1) - B'_{k+1}(x)$

Or : $B'_n(x) = nB_{n-1}(x)$.

Donc : $\left(B_{k+1}(x+1) - B_{k+1}(x)\right)' = (k+1)B_k(x+1) - (k+1)B_k(x)$.

D'où : $\left(B_{k+1}(x+1) - B_{k+1}(x)\right)' = (k+1)[B_k(x+1) - B_k(x)]$

Et : $\left(B_{k+1}(x+1) - B_{k+1}(x)\right)' = (k+1)kx^{k-1}$

Quand les dérivées de deux fonctions f et g sont égales (f '(x) = g'(x)), c'est que les fonctions sont égales à une constante près.

Donc : $B_{k+1}(x+1) - B_{k+1}(x) = (k+1)x^k + cte$.

En posant x = 0, il vient : $B_{k+1}(0+1) - B_{k+1}(0) = (k+1)(0)^k + cte$.

D'où : $B_{k+1}(1) - B_{k+1}(0) = cte$.

Or : $B_n(0) = B_n(1)$ pour tout entier n.

Donc : $cte = 0$.

E, résultat : $B_{k+1}(x+1) - B_{k+1}(x) = (k+1)x^k$

D'où : C = D. L'hérédité est vérifiée.

Conclusion

D'après le théorème de récurrence, la propriété étant vraie pour n = 1 et étant héréditaire, elle est vraie pour tout entier naturel non nul :

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$$

4. Calculons $\sum_{k=0}^{k=p} k^{n-1}$.

$$\sum_{k=0}^{k=p} k^{n-1} = 0 + (1)^{n-1} + (2)^{n-1} + (3)^{n-1} + \cdots + (p)^{n-1}$$

Or : $B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$.

Donc : $x^{n-1} = \frac{1}{n}[B_n(x+1) - B_n(x)]$

D'où : $(0)^{n-1} = \frac{1}{n}[B_n(1) - B_n(0)]$

$(1)^{n-1} = \frac{1}{n}[B_n(2) - B_n(1)]$

$(2)^{n-1} = \frac{1}{n}[B_n(3) - B_n(2)]$

…

$(p)^{n-1} = \frac{1}{n}[B_n(p+1) - B_n(p)]$

En additionnant les membres de gauche et de droite ci-dessus, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{k=p} k^{n-1} = \frac{1}{n}[B_n(p+1) - B_n(0)]$$

5. Applications

Calculons $\sum_{k=0}^{k=p} k^2$.

$$\sum_{k=0}^{k=p} k^2 = \frac{1}{3}[B_3(p+1) - B_3(0)] = \frac{1}{3}\left[(p+1)^3 - \frac{3}{2}(p+1)^2 + \frac{1}{2}(p+1)\right]$$

$$\sum_{k=0}^{k=p} k^2 = \frac{1}{3}(p+1)\left[(p+1)^2 - \frac{3}{2}(p+1) + \frac{1}{2}\right]$$

$$\sum_{k=0}^{k=p} k^2 = \frac{1}{6}(p+1)[2(p+1)^2 - 3(p+1) + 1]$$

$$\sum_{k=0}^{k=p} k^2 = \frac{1}{6}(p+1)[2p^2 + 4p + 2 - 3p - 3 + 1]$$

$$\sum_{k=0}^{k=p} k^2 = \frac{1}{6}(p+1)[2p^2 + p] = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$$

Calculons $\sum_{k=0}^{k=p} k^3$.

$$\sum_{k=0}^{k=p} k^3 = \frac{1}{4}[B_4(p+1) - B_4(0)]$$

On obtient :

$$\sum_{k=0}^{k=p} k^3 = \frac{1}{4}[(p+1)^4 - 2(p+1)^3 + (p+1)^2]$$

D'où :

$$\sum_{k=0}^{k=p} k^3 = \frac{1}{4}p^2(p+1)^2$$

Pour calculer $\sum_{k=0}^{k=p} k^4$, on calcule $\frac{1}{5}[B_5(p+1) - B_5(0)]$.

Elle est pas belle la vie ?