

RÉCURRENCES - HÉRÉDITÉ

L'étape de vérification de l'hérédité est une étape plus délicate que l'étape d'initialisation dans un raisonnement par récurrence. Une rigueur toute particulière doit être apportée à la formulation des hypothèses et au calcul littéral.

Démontrer que chacune des propriétés ci-dessous est héréditaire :

1. On considère la propriété $P(n) : 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. On considère la propriété $P(n) : 2^n \geq 4n$ pour $n \geq 4$.

3. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et, pour tout $n > 0$, par : $u_{n+1} = \sqrt{4 + u_n^2}$.

On considère la propriété $P(n) : u_n = 2\sqrt{n}$.

4. Soit la suite (q_n) définie par $q_1 = 1/3$ et, pour tout $n \geq 1$, par : $q_{n+1} = \frac{n+1}{3n} q_n$.

On considère la propriété $P(n) : q_n = \frac{n}{3^n}$.