Exercice 45, page 38 *du livre Hyperbole Spécialité Terminale.*

Soit P(n) : "$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\times\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$"

Démontrer que cette propriété est vraie pour tout n entier tel que n ≥ 2.

Un exemple de rédaction rigoureuse possible parmi une multitude...

On considère la propriété P(n) : "$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\times\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$ ".

Démontrons que P(n) est vraie pour tout entier n ≥ 2.

Initialisation

La propriété P(n) est-elle vraie pour n = 2 ? A-t-on $\underbrace{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\times\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}_{A}=\underbrace{\frac{n+1}{2n}}_{B}$ pour n = 2 ?

Pour n = 2, on a : $A=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)=1-\frac{1}{4}=\frac{4}{4}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

$B=\frac{2+1}{2(2)}=\frac{3}{4}$

On a : A = B. Donc P(2) est vraie (la propriété P(n) est vraie pour n = 2).

Hérédité

On suppose P(k) vraie, c'est-à-dire $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\times\cdots\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{k+1}{2k}$.

La propriété P(k+1) est-elle vraie ? A-t-on $\underbrace{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\times\cdots\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)}_{C}=\underbrace{\frac{(k+1)+1}{2(k+1)}}_{D}$?

On a : C=$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{k+1}{2k}\times\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{k+1}{2k}\times\left(\frac{(k+1)^2}{(k+1)^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)$

Donc : C=$\frac{k+1}{2k}\times\left(\frac{(k+1)^2-1}{(k+1)^2}\right)=\frac{k+1}{2k}\times\left(\frac{[(k+1)-1][(k+1)+1]}{(k+1)^2}\right)=\frac{k+1}{2k}\times\left(\frac{[k][k+2]}{(k+1)(k+1)}\right)=\frac{(k+2)}{2(k+1)}$

Or : D=$\frac{(k+1)+1}{2(k+1)}=\frac{(k+2)}{2(k+1)}$.

Donc : C = D. La propriété est héréditaire (l'hérédité est vérifiée).

Conclusion

La propriété étant vraie pour n = 2 (initialisation) et étant héréditaire, d'après le théorème de récurrence, elle est vraie pour tout n ≥ 2.