Polynômes de Bernoulli

On considère les polynômes B_0, B_1, ..., B_n, définis de la façon suivante :

quel que soit le réel x, $B_0(x) = 1$ et $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$ et

pour tout entier naturel $n \geq 2$: $B'_n(x) = nB_{n-1}(x)$ avec $B_n(0) = B_n(1)$.

1. Déterminer les polynômes B_2, B_3, B_4 et B_5.

   Démontrer par récurrence que le polynôme $B_n(x)$ est un polynôme de degré n pour tout entier n ≥ 2.

2. Calculer $B_0(x+1) - B_0(x)$, $B_1(x+1) - B_1(x)$, $B_2(x+1) - B_2(x)$, $B_3(x+1) - B_3(x)$ et $B_4(x+1) - B_4(x)$.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, on a :

   $$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1} \text{ quel que soit le réel x}$$

4. Calculer $\sum_{k=0}^{k=p} k^{n-1}$.

5. Applications

   Calculer $\sum_{k=0}^{k=p} k^2$, puis calculer $\sum_{k=0}^{k=p} k^3$ et $\sum_{k=0}^{k=p} k^4$.