

droites de l'espace

question 1

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère la droite (D) caractérisée analytiquement par le système :

$$\begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ 3x - y + 5z + 4 = 0 \end{cases}$$

Déterminons un point et un vecteur directeur de la droite (D).

Tous les points $M(x; y; z)$ de la droite (D), dans l'espace à trois dimensions, ont leurs trois coordonnées qui vérifient les deux équations stipulées dans le système.

Posons arbitrairement $z = 0$. Autrement dit, déterminons s'il existe un point de l'espace appartenant à la droite (D) qui a pour élévation $z = 0$, c'est-à-dire qui se trouve dans le plan $(O; x, y)$ horizontal de l'espace. Recherchons tout simplement les coordonnées du point d'intersection de la droite (D) et du plan horizontal $(O; x, y)$ si toutefois un tel point existe. La seule possibilité pour qu'un tel point n'existe pas serait que la droite (D) soit parallèle au plan $(O; x, y)$, c'est-à-dire soit horizontale.

Pour $z = 0$, le système devient :

$$(S) \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 3x - y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } (S) \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 3x - y + 4 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \quad (E_1) \\ 3x - y = -4 \quad (E_2) \end{cases} \stackrel{(E_1)+(E_2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + y = 2 \quad (E_1) \\ 4x = -2 \quad (E_1) + (E_2) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion, la droite comporte un point dont les coordonnées sont $\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}; 0\right)$.

Nous le noterons A.

Posons maintenant $x = 0$. Autrement dit, déterminons s'il existe un point de l'espace appartenant à la droite (D) qui se trouve dans le plan $(O; y, z)$ vertical de l'espace.

Recherchons les coordonnées du point d'intersection de la droite (D) et du plan horizontal $(O; y, z)$ si toutefois il existe. La seule possibilité pour qu'il n'existe pas serait que la droite (D) soit parallèle au plan $(O; y, z)$, c'est-à-dire soit verticale.

Pour $x = 0$, le système devient :

$$(S) \begin{cases} y + z - 2 = 0 \\ -y + 5z + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Or } (S) \begin{cases} y + z - 2 = 0 \\ -y + 5z + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 2 \text{ (E}_1\text{)} \\ -y + 5z = -4 \text{ (E}_2\text{)} \end{cases} \stackrel{(E_1)+(E_2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y + z = 2 \text{ (E}_1\text{)} \\ 6z = -2 \text{ (E}_1\text{)} + \text{(E}_2\text{)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{3} \\ z = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Conclusion, la droite comporte un point dont les coordonnées sont $\left(0; \frac{7}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

Nous le noterons B.

Déterminons un vecteur directeur de la droite (D).

Il va de soi que le vecteur \overrightarrow{AB} est un vecteur directeur de la droite (AB) puisque A et B sont deux points de la droite (D).

Déterminons \overrightarrow{AB} .

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) \\ \frac{7}{3} - \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{3} - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

\overrightarrow{AB} et $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs colinéaires, tous deux vecteurs directeurs de la droite (D). Le

vecteur \vec{u} ayant des coordonnées entières plus simples que celles du vecteur \overrightarrow{AB} , on le préférera dans les éventuels calculs.

REMARQUE

Il va de soi qu'il appartient à chacun de s'amuser avec les écritures posées en hypothèses. Il est important de choisir d'autres valeurs que $z = 0$ et $x = 0$ pour obtenir les coordonnées d'autres points de la droite (D), calculer d'autres vecteurs directeurs et se convaincre qu'ils sont naturellement tous colinéaires.

Elle est pas belle la vie ?

Kurt VONNEGUT