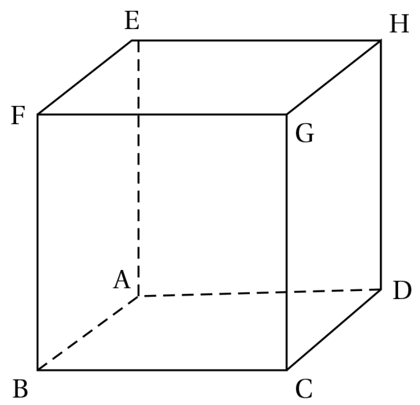
correction d'exercice

Exercice 1

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.
On se place dans le repère orthonormal $\left(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AE}\right)$.
On considère les points $I\left(1 ; \frac{1}{3} ; 0\right)$, $J\left(0 ; \frac{2}{3} ; 1\right)$, $K\left(\frac{3}{4} ; 0 ; 1\right)$ et $L(a ; 1 ; 0)$ avec a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0 ; 1]$.



1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).

2. Démontrer que la droite (KL) a pour représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{3}{4} + t'\left(a - \frac{3}{4}\right) \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{array}\right. , \ t' \in \mathbb{R}$$

3. Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si, et seulement si, $a = \frac{1}{4}$.

1. Pour tout point M(x, y, z) de l'espace, M∈(IJ) ⇔ $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires

⇔ Il existe un réel t tel que $\overrightarrow{IM} = t\overrightarrow{IJ}$ ⇔ $\begin{pmatrix} x-1 \\ y-\frac{1}{3} \\ z-0 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 0-1 \\ \frac{2}{3}-\frac{1}{3} \\ 1-0 \end{pmatrix}$ ⇔ $\begin{cases} x-1 = -t \\ y-\frac{1}{3} = \frac{1}{3}t \\ z = t \end{cases}$

⇔ $\begin{cases} x = 1-t \\ y = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}t \\ z = t \end{cases}$

Le système ci-dessus est une représentation paramétrique de la droite (IJ). Ces trois relations donnent, pour une valeur du réel t, chacune des trois coordonnées d'un point de la droite (IJ).

2. Démontrons que la droite (KL) a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4} + t'\left(a - \frac{3}{4}\right) \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4} + t'\left(a - \frac{3}{4}\right) \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{3}{4} = t'^{\left(a-\frac{3}{4}\right)} \\ y - 0 = t' \\ z - 1 = -t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{3}{4} = t' \times \left(a - \frac{3}{4}\right) \\ y - 0 = t' \times 1 \\ z - 1 = t' \times (-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - \frac{3}{4} \\ y - 0 \\ z - 1 \end{pmatrix} = t' \begin{pmatrix} a - \frac{3}{4} \\ 1 - 0 \\ 0 - 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - \frac{3}{4} \\ y - 0 \\ z - 1 \end{pmatrix} = t' \begin{pmatrix} a - \frac{3}{4} \\ 1 - 0 \\ 0 - 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{KM} = t'\overrightarrow{KL}$$

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{KM}$ et $\overrightarrow{KL}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ Pour tout point M(x, y, z) de l'espace, M$\in$(KL).

<u>Conclusion</u>

La représentation paramétrique proposée est bien une représentation paramétrique de la droite (KL).

3. Démonstration de l'implication réciproque $\Leftarrow$.

Démontrons que si $a = \frac{1}{4}$, alors les droites (IJ) et (KL) sont sécantes.

Si $a = \frac{1}{4}$, alors les droites (IJ) et (KL) ont pour représentations paramétriques respectives les deux représentations suivantes :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}t \\ z = t \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x = \frac{3}{4} + t'\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{cases}$$

C'est-à-dire : $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}t \\ z = t \end{cases}$ et $\begin{cases} x = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}t' \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{cases}$

Les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si et seulement s'il existe un point de coordonnées (x ; y ; z) vérifiant les deux représentations paramétriques.

En identifiant deux à deux les coordonnées x, y et z des deux représentations, nous obtenons le système :

$$\begin{cases} 1 - t = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}t' \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3}t = t' \\ t = 1 - t' \end{cases}$$

Or : $\begin{cases} 1 - t = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}t' \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3}t = t' \\ t = 1 - t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - t = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}t' \\ 1 + t = 3t' \\ 1 - t = t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}t' \\ 1 + t = 3t' \\ 1 - t = t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4t' = 3 - 2t' \\ 1 + t = 3t' \\ 1 - t = t' \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6t' = 3 \\ 1 + t = 3t' \\ 1 - t = t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = \frac{1}{2} \\ 1 + t = \frac{3}{2} \\ 1 - t = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc, les droites (IJ) et (KL) sont sécantes en un point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Démonstration de l'implication directe $\Rightarrow$.

Pour démontrer que si les droites (IJ) et (KL) sont sécantes, alors $a = \frac{1}{4}$, il suffit d'identifier deux à deux les coordonnées x, y et z des deux représentations afin de déterminer s'il existe un point d'intersection, ce qui conduit au résultat $a = \frac{1}{4}$.