PLANS de l'espace

caractérisation vectorielle d'un plan

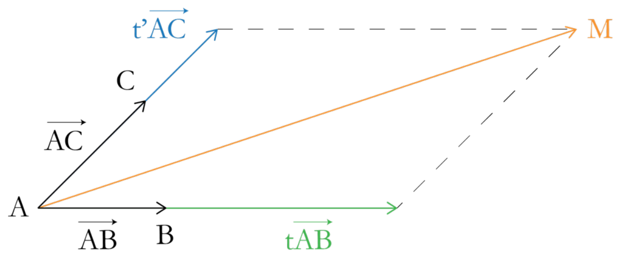
On suppose l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère trois points A, B et C non alignés de l'espace.

Cours

Un point M appartient au plan (ABC) si et seulement si il existe deux réels t et t' tels que :

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} + t'\overrightarrow{AC}$$

On dit que le plan est dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont des vecteurs directeurs du plan (ABC).



Position du problème : Comment caractériser un plan (ABC) ?

Considérons les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ et le point A(x_A, y_A, z_A).

Représentation paramétrique d'un plan de l'espace.

Pour tout point M(x, y, z) de l'espace, M∈(ABC) ⇔ $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} + t'\overrightarrow{AC}$ où t et t' sont deux réels ⇔ $\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + t'\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ ⇔ $\begin{cases} x - x_A = at + a't' \\ y - y_A = bt + b't' \\ z - z_A = ct + c't' \end{cases}$

⇔ $\begin{cases} x = at + a't' + x_A \\ y = bt + b't' + y_A \\ z = ct + c't' + z_A \end{cases}$

Le système ci-dessus est appelé représentation paramétrique du plan (ABC). Ces trois relations donnent, pour une valeur des réels t et t', chacune des coordonnées d'un point du plan (ABC).

Application

On considère le plan (P) passant par l'origine O du repère et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ avec :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

Pour tout point M(x, y, z) de l'espace, M∈(P) ⇔ $\overrightarrow{OM} = t\vec{u} + t'\vec{v}$ où t et t' sont deux réels ⇔ $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + t'\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ ⇔ $\begin{cases} x = t \\ y = t + t' \\ z = t' \end{cases}$ avec t et t' réels

Représentation paramétrique du plan (P).

Pour t = 0 et t' = 1, on a : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 + 1 = 1. \\ z = 1 \end{cases}$

Le point de coordonnées (0, 1, 1) appartient au plan (P). Ce point est l'image du point O dans la translation de vecteur $\vec{v}$.

Pour t = 1 et t' = 0, on a : $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 0 = 1. \\ z = 0 \end{cases}$

Le point de coordonnées (1, 1, 0) appartient au plan (P). Ce point est l'image du point O dans la translation de vecteur $\vec{u}$.

Représentation du plan (P) par une équation cartésienne.

Le système (S) $\begin{cases} x = t \\ y = t + t' \\ z = t' \end{cases}$ est équivalent à $\begin{cases} x = t \\ y = x + z \\ z = t' \end{cases}$, par exemple.

D'où : (S) équivaut à $\begin{cases} x = t \\ z = t' \\ x - y + z = 0 \end{cases}$

L'équation x - y + z est appelée équation cartésienne du plan (P).

Propriété

Une équation cartésienne de plan est de la forme ax + by + cz + d = 0.
Cette équation comporte une information très utile :
Le vecteur $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est un vecteur orthogonal au plan (P).

Exercice 1

On considère un tétraèdre ABCD.
Soit M le point tel que $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}$.
Démontrer que le point M appartient au plan ABC.

Exercice 2

Cours
Soit $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.
Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont dits coplanaires lorsque A, B, C et D appartiennent au même plan (A, B, C et D coplanaires).

On considère un pavé droit ABCDEFGH.
On note I et J les milieux respectifs des côtés [GH] et [FG].
Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{DH}$ sont coplanaires.

Exercice 3

On suppose l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considère le plan (P) passant par le point A(1 ; -2 ; 3) et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On modélisera dans l'espace la situation à l'aide du logiciel GeoGebra.

1. Déterminer une représentation paramétrique du plan (P).
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (P).
3. Déterminer un vecteur $\vec{n}$ normal au plan.
4. Déterminer les produits scalaires $\vec{u}.\vec{n}$ et $\vec{v}.\vec{n}$.