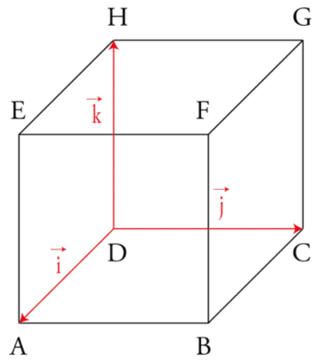
Géométrie dans l'espace

exercice

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé direct $\left(D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}\right)$, on considère le cube ABCDEFGH de côté 1 unité, représenté en perspective ci-dessous et disponible en maquette.

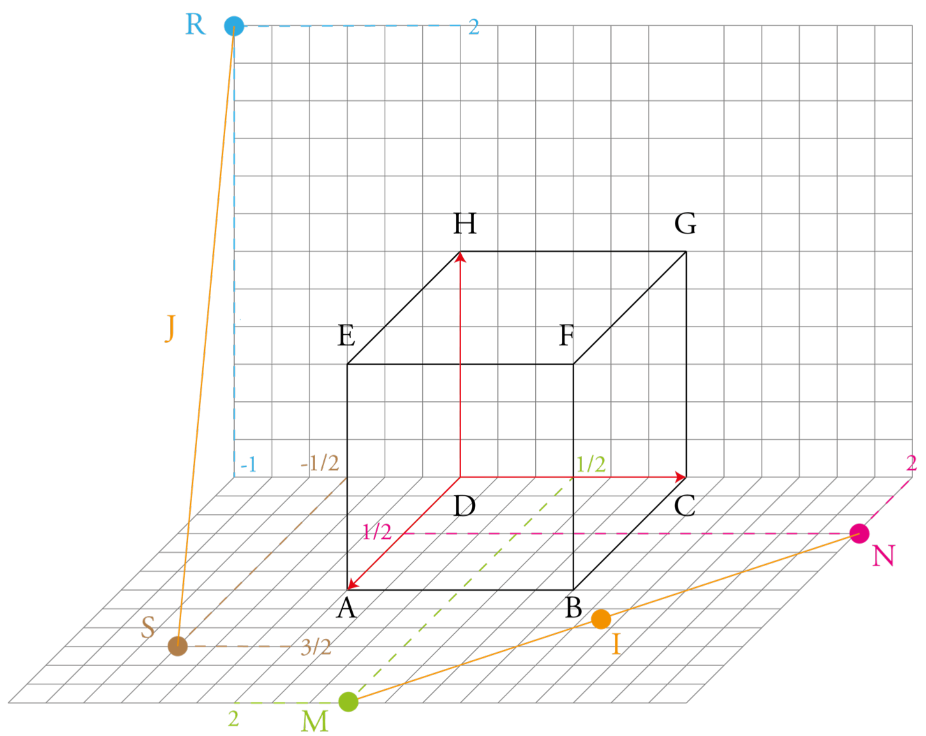


1. Tableau de coordonnées des points A à H.

Point	Coordonnées
A	(1 ; 0 ; 0)
B	(1 ; 1 ; 0)
C	(0 ; 1 ; 0)
D	(0 ; 0 ; 0)
E	(1 ; 0 ; 1)
F	(1 ; 1 ; 1)
G	(0 ; 1 ; 1)
H	(0 ; 0 ; 1)

2. Construction des points ci-dessous :

$$M\left(2; \frac{1}{2}; 0,\right), N\left(\frac{1}{2}; 2; 0\right), R(0; -1; 2) \text{ et } S\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)$$



3. Déterminons les coordonnées des points I et J, milieux respectifs des segments [MN] et [RS].

I a pour coordonnées $\left(\frac{x_M+x_N}{2}; \frac{y_M+y_N}{2}; \frac{z_M+z_N}{2}\right)$, c'est-à-dire $\left(\frac{2+\frac{1}{2}}{2}; \frac{\frac{1}{2}+2}{2}; \frac{0+0}{2}\right)$.
Donc I a pour coordonnées $\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{4}; 0\right)$.

J a pour coordonnées $\left(\frac{x_R+x_S}{2}; \frac{y_R+y_S}{2}; \frac{z_R+z_S}{2}\right)$, c'est-à-dire $\left(\frac{0+\frac{3}{2}}{2}; \frac{-1-\frac{1}{2}}{2}; \frac{2+0}{2}\right)$.
Donc J a pour coordonnées $\left(\frac{3}{4}; -\frac{3}{4}; 1\right)$.

4. Calculons les distances DB, BI et DI. Les points D, B et I sont-ils alignés ?

On a : $DB = \sqrt{(x_B - x_D)^2 + (y_B - y_D)^2 + (z_B - z_D)^2}$ avec D(0 ; 0 ; 0).
Donc : $DB = \sqrt{(x_B)^2 + (y_B)^2 + (z_B)^2} = \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (0)^2} = \sqrt{2}$

De même : $DI = \sqrt{(x_I - x_D)^2 + (y_I - y_D)^2 + (z_I - z_D)^2}$ avec D(0 ; 0 ; 0).
Donc : $DI = \sqrt{(x_I)^2 + (y_I)^2 + (z_I)^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2 + (0)^2} = \sqrt{2\left(\frac{5}{4}\right)^2} = \frac{5}{4}\sqrt{2}$

Enfin : $BI = \sqrt{(x_I - x_B)^2 + (y_I - y_B)^2 + (z_I - z_B)^2}$
Donc : $BI = \sqrt{\left(\frac{5}{4} - 1\right)^2 + \left(\frac{5}{4} - 1\right)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{2\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$

On a : $DB + BI = \sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2} = \frac{5}{4}\sqrt{2} = DI$. Donc les points D, B et I sont alignés dans cet ordre.

5. Calculons les distances NG et ES.

On a : $NG = \sqrt{(x_G - x_N)^2 + (y_G - y_N)^2 + (z_G - z_N)^2} = \sqrt{\left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 + (1-2)^2 + (1-0)^2}$
Donc : $NG = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (1)^2 + (1)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$

On a : $ES = \sqrt{(x_S - x_E)^2 + (y_S - y_E)^2 + (z_S - z_E)^2}$
Donc : $ES = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - 1\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} - 0\right)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (1)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1}$
D'où : $ES = \sqrt{\frac{6}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$