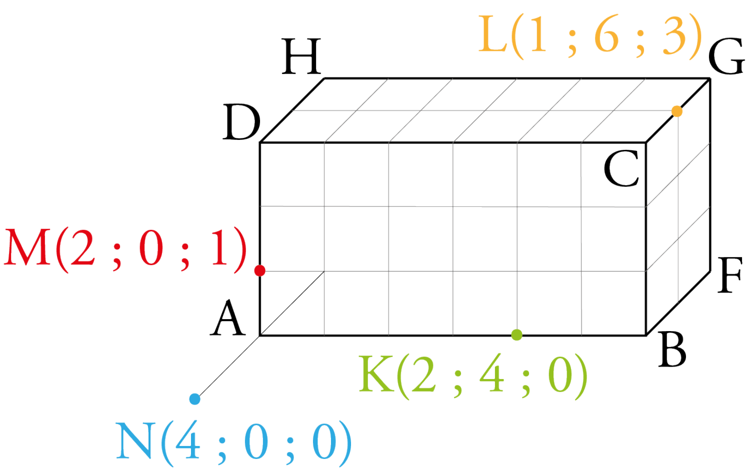
Test élémentaire

1. Tableau de coordonnées complété.

Point	Coordonnées cartésiennes
A	(2 ; 0 ; 0)
B	(2 ; 6 ; 0)
C	(2 ; 6 ; 3)
D	(2 ; 0 ; 3)
E	(0 ; 0 ; 0)
F	(0 ; 6 ; 0)
G	(0 ; 6 ; 3)
H	(0 ; 0 ; 3)
P	(0 ; 1 ; 3)
Q	(2 ; 2 ; 2)
R	(1 ; 4 ; 3)
S	(1 ; 6 ; 2)

2. Pour les K(2 ; 4 ; 0), L(1 ; 6 ; 3), M(2 ; 0 ; 1) et N(4 ; 0 ; 0), voir figure.



3. Déterminons les coordonnées de I, milieu de [KL].

   I a pour coordonnées $\left(\frac{x_K+x_L}{2}; \frac{y_K+y_L}{2}; \frac{z_K+z_L}{2}\right)$, c'est-à-dire $\left(\frac{2+1}{2}; \frac{4+6}{2}; \frac{0+3}{2}\right)$.

   Donc I a pour coordonnées $\left(\frac{3}{2}; 5; \frac{3}{2}\right)$.

4. Calculons AG.

   $AG = \sqrt{(x_G - x_A)^2 + (y_G - y_A)^2 + (z_G - z_A)^2} = \sqrt{(0-2)^2 + (6-0)^2 + (3-0)^2}$

   Donc : $AG = \sqrt{(2)^2 + (6)^2 + (3)^2} = \sqrt{4 + 36 + 9} = \sqrt{49} = 7$

5. Déterminons $\overrightarrow{NL}$.

$\overrightarrow{NL}$ a pour coordonnées vectorielles $\begin{pmatrix} x_L - x_N \\ y_L - y_N \\ z_L - z_N \end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix} 1-4 \\ 6-0 \\ 3-0 \end{pmatrix}$, c.-à-d. $\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

6. Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{NL}\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont colinéaires car $\overrightarrow{NL} = -3\vec{u}$.

7. Déterminons les coordonnées du point T tel que $\overrightarrow{CT} = -2\vec{u}$.

$\overrightarrow{CT} = -2\vec{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_T - 2 \\ y_T - 6 \\ z_T - 3 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_T - 2 \\ y_T - 6 \\ z_T - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_T - 2 = -2 \\ y_T - 6 = 4 \\ z_T - 3 = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_T = -2 + 2 = 0 \\ y_T = 4 + 6 = 10 \\ z_T = 2 + 3 = 5 \end{cases}$

Conclusion : Le point T a pour coordonnées$(0\ ;\ 10\ ;\ 5)$.

8. Déterminons $\overrightarrow{NL}.\overrightarrow{ND}$.

On a : $\overrightarrow{NL}\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ND} = \begin{pmatrix} x_D - x_N \\ y_D - y_N \\ z_D - z_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-4 \\ 0-0 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Donc : $\overrightarrow{NL}.\overrightarrow{ND} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = (-3)(-2)\ + 6(0) + 3(3) = 6 + 9 = 15.$

9. Déterminons NL et ND.

$NL = \sqrt{(-3)^2 + (6)^2 + (3)^2} = \sqrt{54} = \sqrt{9 \times 6} = \sqrt{9} \times \sqrt{6} = 3\sqrt{6}$

$ND = \sqrt{(-2)^2 + (0)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$

10. Déterminons $cos\left(\overrightarrow{NL}, \overrightarrow{ND}\right)$.

On sait que : $\overrightarrow{NL}.\overrightarrow{ND} = NL \times ND \times cos\left(\overrightarrow{NL}, \overrightarrow{ND}\right)$.

Donc : $15 = 3\sqrt{6} \times \sqrt{13} \times cos\left(\overrightarrow{NL}, \overrightarrow{ND}\right)$.

D'où : $cos\left(\overrightarrow{NL}, \overrightarrow{ND}\right) = \frac{15}{3\sqrt{6}\times\sqrt{13}} = \frac{5}{\sqrt{6}\times\sqrt{13}}$.