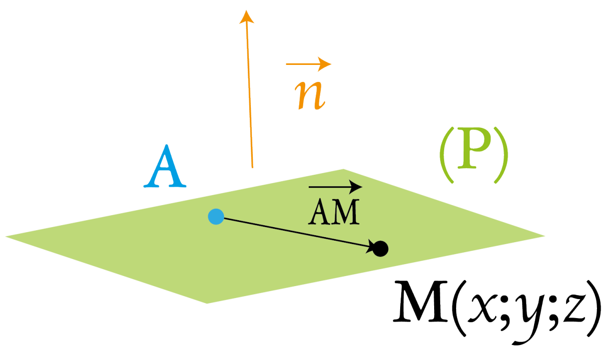
PLAN de l'espace

équation cartésienne d'un plan

On suppose l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère un point A de l'espace et un vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Position du problème
On souhaite caractériser le plan (P) qui passe par le point $A(x_0; y_0; z_0)$ et qui est normal au vecteur $\vec{n}$.



Cours
Pour tout point $M(x; y; z)$ de l'espace, $M \in (P) \Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$

En traduisant symboliquement l'appartenance du point M au plan (P), on obtient des écritures qui conduiront à l'obtention d'une équation dite cartésienne définissant le plan (P).

Comment rédiger ?

Soit $A(x_0; y_0; z_0)$ un point et $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace. (Formulation des hypothèses)

Déterminons une équation cartésienne du plan (P) qui passe par le point A et qui est normal au vecteur $\vec{n}$. (Formulation du problème)

(Résolution du problème)

Pour tout point $M(x; y; z)$ de l'espace, $M \in (P) \Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow$

$$\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by + cz \; - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz \; + d = 0$$

avec : $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$.

L'équation $ax + by + cz + d = 0$ est appelée équation cartésienne du plan (P).

Les points du plan (P) ont leurs coordonnées $(x; y; z)$ qui vérifient toutes l'équation $ax + by + cz + d = 0$.

Propriété

Une équation cartésienne de plan dans l'espace s'écrit sous la forme :

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Dans cette équation, les coefficients a, b et c sont les coordonnées vectorielles $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ d'un vecteur normal au plan (P).

exercices

Exercice 4

Soit $A(1; -1; 2)$ un point et $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace.

Déterminer une équation cartésienne du plan (P) qui passe par le point A et qui est normal au vecteur $\vec{n}$.

Exercice 5

On considère le plan (P) d'équation cartésienne $x - y + 3z - 6 = 0$.

1. Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal au plan.
2. Déterminer les coordonnées de trois points du plan.
3. En déduire les coordonnées de deux vecteurs non colinéaires du plan.
4. Vérifier que les produits scalaires de ces deux vecteurs avec le vecteur normal au point sont nuls.