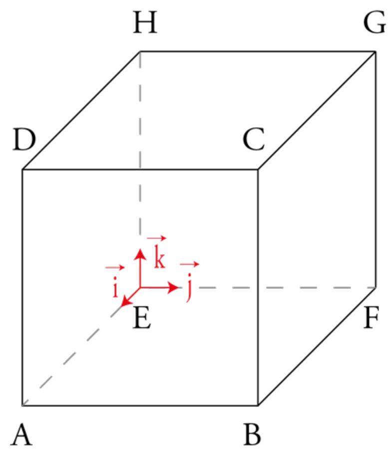
Géométrie dans l'espace

Découverte

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(E;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère le cube ABCDEFGH de côté 6 unités représenté en perspective ci-dessous et fabriqué en carton à l'échelle 1.



Le point E étant l'origine du repère $(E;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, ses coordonnées cartésiennes sont (0 ; 0 ; 0) dans ce repère.
Comme le cube possède des arêtes de longueur 6 unités, le point A, par exemple, a pour coordonnées cartésiennes (6 ; 0 ; 0).
La première coordonnée 6 est l'abscisse du point A dans le repère $(E;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.
La deuxième coordonnée 0 est l'ordonnée du point A.
La troisième coordonnée 0 est appelée élévation, cote ou altitude du point A.

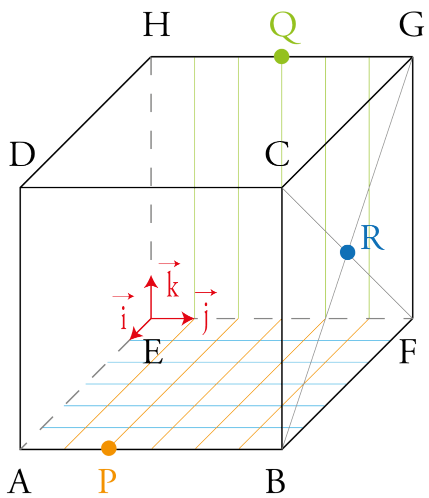
Tableau de coordonnées des points A à H.

Point	Coordonnées
A	(6 ; 0 ; 0)
B	(6 ; 6 ; 0)
C	(6 ; 6 ; 6)
D	(6 ; 0 ; 6)
E	(0 ; 0 ; 0)
F	(0 ; 6 ; 0)
G	(0 ; 6 ; 6)
H	(0 ; 0 ; 6)

Considérons le point P tel que P ∈ [AB] et $AP = \frac{1}{3}AB$.
Le point P est à une distance de 2 du point a sur le segment [AB].
Ses coordonnées sont : (6 ; 2 ; 0).

Considérons le point Q milieu du segment [HG].
Le point Q a pour coordonnées (0 ; 3 ; 6).

Considérons le point R, milieu de la face BFGC du cube.
Les coordonnées du point R sont (3 ; 6 ; 3).



Définition

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, O étant l'origine du repère et $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ étant une base orthonormée de l'espace, un point M de l'espace est repéré par ses trois coordonnées cartésiennes (x ; y ; z) où :

— x est l'abscisse du point M, coordonnée suivant l'axe $(O\vec{\imath})$,

— y est l'ordonnée du point M, coordonnée suivant l'axe $(O\vec{\jmath})$, et

— z est l'altitude du point M (appelée aussi élévation ou cote), coordonnée suivant l'axe $(O\vec{k})$.

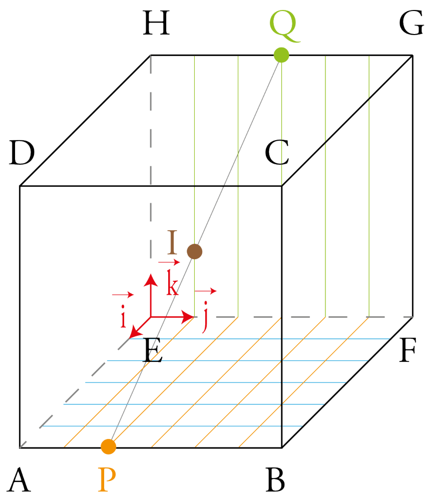
Définition

Le milieu I d'un segment [AB] où A et B ont pour coordonnées respectives $(x_A; y_A; z_A)$ et $(x_B; y_B; z_B)$ dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ a pour coordonnées cartésiennes :

$$\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$$

Application

Considérons le point I, milieu du segment [PQ] avec P(6 ; 2 ; 0) et Q(0 ; 3 ; 6).



Le point I a pour coordonnées : $\left(\frac{x_P+x_Q}{2};\frac{y_P+y_Q}{2};\frac{z_P+z_Q}{2}\right)$.

C'est-à-dire $\left(\frac{6+0}{2};\frac{2+3}{2};\frac{0+6}{2}\right)$, donc $\left(3;\frac{5}{2};3\right)$.

Définition

Soient A et B deux points de l'espace de coordonnées respectives $(x_A; y_A; z_A)$ et $(x_B; y_B; z_B)$ dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

La distance AB est donnée par l'expression : $AB = \sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2+(z_A-z_B)^2}$

Ou encore : $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$.

Application

Calculer la distance PQ avec P(6 ; 2 ; 0) et Q(0 ; 3 ; 6).

Figure