Géométrie dans l'espace

Vecteurs de l'espace

Définitions

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les points A, B et M de coordonnées respectives $A(x_A; y_A; z_A)$, B$(x_B; y_B; z_{AB})$ et M$(x; y; z)$.

Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour coordonnées vectorielles $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, c'est-à-dire que :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées vectorielles $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, c'est-à-dire que :

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{\imath} + (y_B - y_A)\vec{\jmath} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

Opérations sur les vecteurs

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ de vecteurs de l'espace définis dans la base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soient λ (lambda) et μ (mu) deux nombres réels.

$$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

$$\lambda\vec{u} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$$

$$\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x + \mu x' \\ \lambda y + \mu y' \\ \lambda z + \mu z' \end{pmatrix}$$

Colinéarité de deux vecteurs

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ de vecteurs de l'espace définis dans la base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel non nul k tel que :

$$\vec{u} = k\vec{v}$$

Propriété

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow \vec{u} = k\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx' \\ ky' \\ kz' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = kx' \\ y = ky' \\ z = kz' \end{cases}$

Produit scalaire de deux vecteurs

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ de vecteurs de l'espace définis dans la base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ se note :

$$\vec{u}.\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = xx' + yy' + zz'$$

Propriété

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$

Propriété

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = AB \times CD \times cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD})$